विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No 1, January, 1976, Pages 1-7

फूरियर श्रेणी का परम अभिसरण

एल० पी० गौतम
रामपुर बघेलन, सतना, म० प्र०

[प्राप्त—जुलाई 19, 1974]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में एक सहचारी फूरियर श्रेणी के परम अभिसरण के लिये उपयुक्त गुणाक ज्ञात किया गया है।

Abstract

On the absolute convergence of an associated Fourier series. *By* L. P. Gautam, Rampur Baghelan, Satna, M. P.

In the present paper we shall determine suitable factor for the absolute convergence of an associated Fourier series.

1. माना कि $f(x)$ आवर्ती फलन है जिसका आवर्त 2π है और लेबेस्क के अनुसार $(-\pi, \pi)$ तक में समाकलनीय है। यहाँ हम कल्पना करेंगे कि $f(x)$ की फूरियर श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \tag{1·1}$$

है। (9·11) का nवां आंशिक योग $S_n(x)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। अर्थात्

$$S_n(x) - S = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(t) \frac{\sin (n+\frac{1}{2})t}{2 \sin t/2} dt \tag{1·2}$$

हम निम्नांकित के रूप में लिखते हैं

$$\phi(t) = \tfrac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t) - 2S\}$$

जहाँ S x का फलन है,

$$\phi_1(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \phi(u)\, du$$

तथा

$$\tau=\left[\frac{K}{t}\right]$$

जहाँ $[x]$ से x का समाकल खंड सूचित होता है।

2. हाल ही में नायक[1] ने फूरियर श्रेणी के परम अभिसरण के सम्बन्ध में एक गुणक ज्ञात किया है। उन्होंने निम्नांकित प्रमेय सिद्ध की।

प्रमेय A: यदि

$$\frac{\phi(t)}{\log (K/t)} \tag{2·1}$$

$(0, \pi)$ में परिबद्ध विचरण वाला हो तो

$$\Sigma \frac{A_n(x)}{(\log n)^2}$$

परम अभिसारी है।

नायक के उपर्युक्त प्रमेय के प्रकाशित होने के पूर्व रे[2] ने फूरियर श्रेणी के परम अभिसरण के लिये श्रेष्ठ सम्भव गुणक ज्ञात किया था जिसमें उपर्युक्त परिणाम निहित है। उन्होंने प्रमेय को सिद्ध किया:

प्रमेय B: यदि

$$\frac{\phi(t)}{\left\{\log \frac{2\pi}{t}\right\}^\delta} \tag{2·2}$$

$(0, \pi)$, $(\delta > 0)$ क्षेत्र में परिबद्ध विचरण वाला हो तो

$$\sum \frac{\phi_1(t)}{\{\log (n+1)\}^{\delta+1}}$$

पूर्णतया अभिसारी होगा।

प्रस्तुत शोधपत्र में एक सहचारी फूरियर श्रेणी के परम अभिसरण के लिये उपर्युक्त गुणक ज्ञात किया गया है। हम निम्नांकित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय: यदि

$$\frac{\phi_1(t)}{\{\log (K/t)\}^\delta} \tag{2·3}$$

$(0, \pi)$ में परिबद्ध विचरण वाला है तो श्रेणी

$$\Sigma \frac{S_n - S}{n (\log n)^{1+\delta}}$$

परम अभिसारी होती। हमें निम्नांकित प्रमेयिका की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका $\delta = 0$ के अतिरिक्त समस्त δ के लिये

$$p(n, \pi) = \int_0^\pi (\log (K/t))^\delta \cos nt \, dt = 0\left(\frac{(\log n)^{\delta-1}}{n}\right). \tag{2·4}$$

यह परिणाम रे[2] का है।

1·3 **प्रमेय की उपपत्ति**

चूँकि
$$\frac{S_n - S}{n (\log n)^{1+\delta}} = \frac{1}{n \, \pi (\log n)^{1+\delta}} \int_0 \phi(t) \frac{\sin (n + \frac{1}{2}) t}{2 \sin t/2} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \phi(t) \cot (t/2) \frac{\sin nt}{n (\log n)^{1+\delta}} dt$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \phi(t) \frac{\cos nt}{n (\log n)^{1+\delta}} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} (\alpha_n + \beta_n)$$

खण्डश: समाकलन करने पर

$$\alpha_n = -\int_0^\pi \frac{\phi_1(t)}{t} \left(\frac{t/2}{\sin t/2}\right)^2 \frac{\sin nt}{n (\log n)^{1+\delta}} dt$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^\pi t \, \phi_1(t) \cot (t/2) \frac{\cos nt}{n (\log n)^{1+\delta}} dt$$

$$= P_n + Q_n$$

अब
$$\sum_{n=1}^\infty | P_n | = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n (\log n)^{1+\delta}} \int_0^\pi \left| \frac{\phi_1(t)}{(\log (K/t))^\delta} \left(\frac{t/2}{\sin t/2}\right)^2 \frac{\sin nt}{t} (\log K/t)^\delta \, dt \right|$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n (\log n)^{1+\delta}} \int_0^\pi | d F(t) | \int_t^\pi \left(\log \left(\frac{K}{u}\right)\right)^\delta \frac{\sin nu}{u} du$$

$$= \int_0^\pi | d F(t) | \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n (\log n)^{1+\delta}} \left| \int_0^\pi \left(\log \left(\frac{K}{u}\right)\right)^\delta \frac{\sin nu}{u} du \right|$$

जहाँ $F(t)=\frac{\phi_1(t)}{(\log (K/t))^\delta}\left(\frac{t/2}{\sin t/2}\right)^2$

माना कि $\tau=\left[\frac{1}{t}\right]$, तो हमें निम्नांकित प्राप्त होता है:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^{1+\delta}}\left|\int_t^\pi (\log (K/u))^\delta \frac{\sin nu}{u} du\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{\tau} \frac{1}{n (\log n)^{1+\delta}}\left|\int_t^\pi (\log (K/u))^\delta \frac{\sin nu}{u} du\right|$$

$$+\sum_{n=\tau+1}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^{1+\delta}}\left|\int_0^\pi (\log (K/u))^\delta \frac{\sin nu}{u} du\right|$$

$=P_1+P_2$, मान लो

चूँकि $$\int_t^\pi (\log (K/u))^\delta \frac{\sin nu}{u}=\begin{cases} 0\ (nt\ (\log (K/t))^\delta) \\ 0\ \left(\frac{(\log (K/t))^\delta}{nt}\right), \end{cases}$$

तो $$P_1=t\ (\log (K/t))^\delta \sum_{n=1}^{\tau} \frac{n}{n (\log n)^{1+\delta}}$$

$$=\frac{1}{\log \tau} \sum_{n=1}^{\tau} \frac{1}{n}$$

$$=0(1)\text{-}$$

तथा $$P_2=\frac{(\log (K/t))^\delta}{t} \sum_{n=\tau+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\log n)^{1+\delta}}$$

$$=0(1).$$

अत: $P_n=0(1)$.

और भी, माना कि

$$G(t)=\frac{t\ \phi_1(t) \cot t/2}{(\log (K/t))^\delta}$$

तथा $$p(n, t)=\int_0^t (\log (K/u))^\delta \cos nu\ du$$

तो $$\Sigma\ |\ Q_n\ |=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{1+\delta}}\left|\int_0^\pi G(t) \cos nt\ (\log (K/t))^\delta\ dt\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G(\pi)\,p(n,\pi)}{(\log n)^{1+\delta}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\int_0^{\pi} d\,G(t)\,p(n,t)\right|}{(\log n)^{1+\delta}}$$

$=Q_1+Q_2$ मान लो

प्रमेयिका का उपयोग करने पर

$$Q_1=A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\,p(n,\pi)\,|}{(\log n)^{1+\delta}}$$

$$=A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(\log n)^2}$$

$$=0(1).$$

तथा $$Q_2=\int_0^{\pi}|\,d\,G(t)\,|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\,p(n,t)\,|}{(\log n)^{1+\delta}}$$

$$=\int_0^{\pi}|\,d\,G(t)\,|\left(\sum_{n=1}^{\tau}+\sum_{\tau+1}^{\infty}\right)\frac{|\,p(n,t)\,|}{(\log n)^{1+\delta}}$$

$$=\int_0^{\pi}|\,d\,G(t)\,|\,(Q_{2\cdot1}+Q_{2\cdot2}),$$ मान लो

चूँकि $$P(n,t)=0\{t(\log(K/t))^{\delta}\},$$

तो $$Q_{2\cdot1}=0(1)\;t(\log(K/t))^{\delta}\sum_{n=1}^{\tau}\frac{1}{(\log n)^{1+\delta}}$$

$$=0(1),$$

और भी

$$Q_{2\cdot2}=\sum_{n=\tau+1}^{\infty}\frac{\left|\,p(n,\pi)-\int_t^{\pi}(\log(K/u))^{\delta}\cos nu\,du\,\right|}{(\log(n+1))^{1+\delta}}$$

$$=\sum_{n=\tau+1}^{\infty}\frac{|\,p(n,\pi)\,|}{(\log n)^{1+\delta}}+\sum_{n=\tau+1}^{\infty}\frac{\left|\int_t^{\pi}(\log(K/u))^{\delta}\cos nu\,du\,\right|}{(\log(n+1))^{1+\delta}}$$

$$=0(1)+(\log(K/t))^{\delta}\sum_{n=\tau+1}^{\infty}\frac{1}{n\,(\log n)^{1+\delta}}$$

$$=0(1).$$

अतः $$Q=0(1).$$

अत: $Q_2=0(1)$.

इसके आगे भी, हमें प्राप्त होता है:

$$\beta_n=\int_0^\pi \phi(t)\ \frac{\cos nt}{n\ (\log n)^{1+\delta}}\,dt$$

$$=\int_0^\pi t\ \phi_1(t)\ \frac{\sin nt}{(\log n)^{1+\delta}}\,dt$$

$$=\left[\phi_1(t)\ (\log (K/t))^{-\delta}\int_0^t v(\log (K/v))^\delta\ \frac{\sin nv}{(\log n)^{1+\delta}}\,dv\right]_0^\pi$$

$$-\int_0^\pi d\{\phi_1(t)\ (\log (K/t))^{-\delta}\}\int_0^t v(\log (K/v))^\delta\ \frac{\sin nv}{(\log n)^{1+\delta}}\,dv$$

$$=-\int_0^\pi d\{\phi_1(t)\ (\log (K/t))^{-\delta}\}\int_0^t v(\log (K/v))^\delta\ \frac{\sin nv}{(\log n)^{1+\delta}}\,dv$$

इतना ही सिद्ध करना पर्याप्त होगा कि

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{1+\delta}}\left|\int_0^t v(\log (K/v))^\delta \sin nv\,dv\right|<\infty.$$

अब
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\int_0^t v(\log (K/v))^\delta \sin nv\,dv\right|}{(\log n)^{1+\delta}}$$

$$\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\tau}+\sum_{\tau=1}^{\infty}\right)\frac{\left|\int_0^t v(\log (K/v))^\delta \sin nv\,dv\right|}{(\log n)^{1+\delta}}$$

$=M_1+M_2$, मान लो

चूँकि
$$\int_0^t v(\log (K/v))^\delta \sin nv\,dv=nt^2\ (\log (K/t))^\delta\int_0^t dv$$

अत:
$$=0(nt^3\ (\log (K/t)^\delta).$$

$$M_1=0(t^3\ (\log (K/t))^\delta\ \sum_{n=1}^{\tau}\frac{n}{(\log n)^{1+\delta}}$$

$$=0(1).$$

तथा
$$\int_0^t v(\log (K/v))^\delta \sin nv\,dv$$

$$=t(\log (K/t))^\delta\int_0^t \sin nv\,dv$$

$$=0\left(\frac{t(\log (K/t))^\delta}{n}\right).$$

तो
$$M_2=0(t (\log (K/t))^{\delta} \sum_{n=\tau+1}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^{1+\delta}}$$

$$=0(1).$$

इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई।

निर्देश

1. नायक, एम० के०, प्रोसी० कैम्ब्रि० फिला० सोसा०, 1971, 70, 421-33
2. रे, बी० के०, वही, 1970, 67, 39-45

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 1, January, 1976, Pages 9-13

लागेर श्रेणी की परम संकलनीयता

टीकम सिंह
शासकीय अभियांत्रिक महाविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—अक्टूबर 22, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में हाल ही में चौधरी द्वारा सिद्ध किये गये एक साध्य को अधिक व्यापक परिकल्पनाओं में प्रतिपादित किया गया है एवं इसका विस्तार नारलुंड परम संकलनीयता के लिए किया गया है।

Abstract

Absolute summability of Laguerre series. *By* Tikam Singh, Government Engineering College, Ujjain.

In this paper a result proved, very recently, by Choudhary is established under more delicate assumtions and is extended to absolute Nörlund summability of Laguerre series.

1. माना कि Σa_n एक अनन्त श्रेणी है जिसके आंशिक योगों का अनुक्रम $\{s_n\}$ है। श्रेणी को परम संकलनीय (N, p_n) या संकलनीय $| N, p_n |$ कहा जाता है, यदि अनुक्रम $\{t_n\}$ परिसीमित विचरण का हो, जहाँ कि

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m} s_m, \quad (P_n \neq 0),$$

$$P_n = \sum_{m=0}^{n} p_m, \quad P_{-1} = p_{-1} = 0$$

नारलुंड संकलनीयता की दो विशिष्ट स्थितियां होती हैं[3] : हारमोनिक संकलनीयता, यदि $p_n = \frac{1}{n+1}$, जिससे कि $P_n \sim \log n$, $n \to \infty$; और चिज़ारो संकलनीयता जबकि $p_n = \binom{n+\delta-1}{\delta-1}$, $\delta > 0$. यह ज्ञात है[1] कि श्रेणी Σa_n संकलनीय $| C, 1 |$ होगी यदि

$$\Sigma \frac{|s_n - A|}{n} < \infty.$$

फलन $f(x) \in L(0,\infty)$ से सम्बन्धित लागेर श्रेणी निम्नलिखित हैं :

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(x), \tag{1·1}$$

जहाँ कि

$$\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n} a_n = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} f(y) L_n^{(\alpha)}(y)\, dy \tag{1·2}$$

और $L_n^{(\alpha)}(x)$, $\alpha > -1$, एक लागेर बहुपद है ।

2. हाल ही में चौधरी[2] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है :

प्रमेय :

$-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ के लिये श्रेणी (1·1) बिन्दु $x=0$ पर संकलनीय $|C, 1|$ होगी, यदि

$$\int_0^t |\phi(y)|\, dy = O(t^{\alpha/2+3/4}),\ t \to 0,$$

$$\int_w^{n} |\phi(y)|\, e^{y/2}\, y^{-\alpha/2-3/4}\, dy = O(1),$$

$$\int_0^{\infty} |\phi(y)|\, e^{y/2}\, y^{-\alpha/2-7/12}\, dy = O(1).$$

जहाँ कि

$$\phi(y) = e^{-y} y^{\alpha} [f(y) - A]/\Gamma(\alpha+1),$$

प्रस्तुत शोध पत्र के प्रमेय 1 में उपर्युक्त साध्य को और अधिक व्यापक परिकल्पनाओं में प्रतिपादित किया गया है और प्रमेय 2 लागेर श्रेणी की नालुंड परम संकलनीयता पर है । हम निम्नांकित प्रमेय सिद्ध करते हैं :

प्रमेय 1 :

$-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ के लिये श्रेणी (1·1) बिन्दु $x=0$ पर संकलनीय $|C, 1|$ होगी यदि

$$\int_t^{\delta} \frac{|\phi(y)|}{y^{\alpha/2+3/4}}\, dy = O\left(\log \frac{1}{t}\right), \tag{2·1}$$

$t \to 0$, δ एक नियत धनात्मक स्थिरांक है,

$$\int_{\delta}^{n} e^{y/2}\, y^{-\alpha/2-3/4}\, |\phi(y)|\, dy = O(\log n), \tag{2·2}$$

और $$\int_n^\infty e^{y/2} y^{-\alpha/2-7/12} | \phi(y) | dy = O(\log n), n \to \infty \tag{2·3}$$

प्रमेय 2 :

माना कि $\{p_n\}$ एक धनात्मक और एकदिष्ट (monotomic) विस्तीर्ण मान अनुक्रम इस प्रकार है कि $\{p_n - p_{n-1}\}$ परिसीमित एकदिष्ट अविस्तीर्ण मान (non-increasing) है, तब $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$ के लिये बिन्दु $x=0$ पर लागेर श्रेणी (1·1) संकलनीय $|N, p_n|$ होगी, यदि प्रतिबन्ध (2·1) (2·2) और (2·3) संतुष्ट होते हैं ।

3. प्रमेयों को सिद्ध करने के लिये हम लागेर बहुपद के निम्नांकित गुणों का उपयोग करेंगे (देखिये, [6] पृ० 175 और 239)

उपप्रमेय 1.

माना कि α स्वेच्छ वास्तविक संख्या है एवं c और w नियत धनात्मक स्थिरांक है, तब यदि $n \to \infty$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} x^{-\alpha/2-1/4} \ O(n^{\alpha/2-1/4}), & \frac{c}{n} \leqslant x \leqslant w; \\ O(n^\alpha), & 0 \leqslant x \leqslant \frac{c}{n}. \end{cases} \tag{3·1}$$

उपप्रमेय 2.

माना कि λ और α स्वेच्छ और वास्तविक है, $w>0$; $0<\eta<4$. तब यदि $n \to \infty$

$$\max e^{-x/2} x^\lambda \left| L_n^{(\alpha)}(x) \right| \sim n^Q, \tag{3·2}$$

जहाँ कि $$Q = \begin{cases} \max(\lambda - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}), & w \leqslant x \leqslant (4-\eta)\, n; \\ \max(\lambda - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}), & x \geqslant w, \end{cases} \tag{3·3}$$

$$S_n(0) = \{\Gamma(\alpha+1)\}^{-1} \int_0^\infty e^{-y} y^\alpha \ L_n^{(\alpha+1)}(y) f(y)\, dy.$$

Q का सर्वाधिक मान साथ में दर्शाये गये अंतराल में लिया गया है ।

4. **प्रमेय 1 की उपपत्ति** : हमें ज्ञात है कि [देखिये[6] पृ० 269]

$$S_n(0) = \{\Gamma(\alpha+1)\}^{-1} \int_0^\infty e^{-y} y^\alpha L_n(\alpha+1)(y) f(y)\, dy$$

लागेर बहुपद के लाम्बिक गुण का उपयोग करने पर

$$\begin{aligned} S_n(0) - A &= \int_0^\infty L_n^{(\alpha+1)}(y)\, \phi(y)\, dy \\ &= \int_0^{c/n} + \int_{c/n}^{w} + \int_w^n + \int_n^\infty \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \ (\text{माना कि}), \end{aligned} \tag{4·1}$$

w एक नियत धनात्मक स्थिरांक है ।

अब (3·1) और (2·1) उपयोग करने पर

$$I_1 = O(n^{\alpha+1}) \int_0^{c/n} | \phi(y) | \, dy$$

$$= O(n^{\alpha+1}) O(n^{-\alpha/2-3/4} \log n)$$

$$= O(n^{\alpha/2+1/4} \log n), \tag{4·2}$$

तथा

$$I_2 = O(n^{\alpha/2+1/4}) \int_{c/n}^{w} y^{-\alpha/2-3/4} | \phi(y) | \, dy$$

$$= O(n^{\alpha/2+1/4} \log n) \tag{4·3}$$

अब (3·2) एवं (3·3) में $\lambda - \frac{1}{2} = \frac{\alpha+1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$ रखने पर और (2·2) का उपयोग करने पर

$$I_3 = O(n^{\alpha/2+1/4}) \int_{w}^{n} e^{y/2} \, y^{-\alpha/2-3/4} \, | \phi(y) | \, dy$$

$$= O(n^{\alpha/2+1/4} \log n).$$

अंत में (3·2) और (3·3) में $\lambda - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}$ रखने पर, जिससे कि $\lambda - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{12}$ और (2·3) का उपयोग करने पर

$$I_4 = O(n^{\alpha/2+5/12}) \int_{n}^{\infty} e^{y/2} \, y^{-\alpha/2-3/4} \, | \phi(y) | \, dy$$

$$= O(n^{\alpha/2+5/12}) \int_{n}^{\infty} e^{y/2} \, y^{-\alpha/2-7/12-1/6} \, | \phi(y) | \, dy$$

$$= O(n^{\alpha/2+1/4}) \int_{n}^{\infty} e^{y/2} \, y^{-\alpha/2-7/12} \, | \phi(y) | \, dy$$

$$= O(n^{\alpha/2+1/4} \log n). \tag{4·5}$$

अतः (3·1), (4·2), ..., (4·5) को मिलाने पर

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{| S_n(0) - A |}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha/2+1/4} \log n}{n}$$

$$= O(1), \quad -1 < \alpha < -\tfrac{1}{2} \text{ के लिये}$$

5. प्रमेय 2 को सिद्ध करने के लिये हमें निम्नांकित अतिरिक्त उपप्रमेयों की आवश्यकता होगी ।

उपप्रमेय 3[5] : यदि $\{p_n\}$ धनात्मक और एकदिष्ट विस्तीर्णमान अनुक्रम इस प्रकार है कि $\{p_n - p_{n-1}\}$ परिसीमित एकदिष्ट अविस्तीर्णमान हो, तो अनुक्रम $\{p_{n+1}/p_n\}$ एकदिष्ट अविस्तीर्णमान होगा ।

उपप्रमेय 4[4] **: यदि** $\{p_n\}$ धनात्मक और एकदिष्ट विस्तीर्णमान अनुक्रम हो और $\{p_{n+1}/p_n\}$ अविस्तीर्णमान अनुक्रम हो तो

$$| C, 1 | \subset | N, p_n |.$$

6. **प्रमेय 2 की उपपत्ति** :

प्रमेय 2, प्रमेय 1 तथा उपप्रमेय 4 का उपयोग करने पर सिद्ध हो जाती है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० घनश्याम पाण्डे का आभारी है जिन्होंने इस शोध पत्र को लिखने का प्रोत्साहन दिया ।

निर्देश

1. भट्ट, एस० एन०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1959, **2**, 73.
2. चौधरी, आर० एस०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1975, **18**, 85.
3. हार्डी, जी० एच०, Divergent series, 1949.
4. मकफाडिन, एल०, **ड्यूक मैथ० जर्न०**, 1942, 9, 168.
5. मेहरोत्रा, एन० डी०, **इंडियन जर्न० मैथ०**, 1967, 9, 467.
6. झेगो, जी०, Orthogonal Polynomials, 1959.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 1, January, 1976, Pages, 15-23

फलन श्रेणी तथा फलन $F_D^{(\gamma)}$ के लिये रूपान्तरण सूत्र

आर० सी० वर्मा
गणित विभाग, इंजीनियरिंग कालेज, रीवाँ
तथा
जी० बी० महाजन
गणित विभाग, राजकीय विज्ञान कालेज, रीवाँ

[प्राप्त—जुलाई 1, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य लारिसेला की श्रेणी $F_D^{(\gamma)}$ का मान ज्ञात करना है, जब इसके समस्त कोणांक इकाई मान लिये गये हों। फिर इस फल का उपयोग फलन $F_D^{(\gamma)}$ के रूपान्तरण सूत्र को प्राप्त करने तथा कई चरों वाले सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन के लिये फलन श्रेणी प्राप्त करने के लिये किया गया है। कतिपय विशिष्ट दशाओं की भी विवेचना दी गई है।

Abstract

Function series and transformation formula for function $F_D^{(\gamma)}$. *By* R. C. Varma, Department of Mathematics, Government Engineering College, Rewa and G. B. Mahajan, Department of Mathematics, Government Science College, Rewa (M. P.).

The object of this paper is to evaluate Lauricella's series $F_D^{(\gamma)}$, when all of its arguments are taken to be unity. This result is then utilized in obtaining a transformation formula of the function $F_D^{(\gamma)}$ and a function series for generalized hypergeometric function of several variables. Few particular cases are also discussed.

लारिसेला की एक श्रेणी[3], जिसमें ऐपेल का फलन F_1 सम्मिलित है जब $r=2$ (और निस्सन्देह गॉस का हाइपरज्यामितीय फलन ${}_2F_1$ जब $r=1$)

$$F_D^{(\gamma)}(\alpha; \beta_1, \ldots, \beta_\gamma; y: z_1, \ldots, z_\gamma) \tag{1·1}$$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_\gamma=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m_1+\ldots+m_\gamma)(\beta_1, m_1)\ldots(\beta_\gamma, m_\gamma)}{(y, m_1+\ldots+m_\gamma)\, m_1! \ldots m_\gamma!} z_1^{m_1} \ldots z_\gamma^{m_\gamma},$$

है जहाँ $(a, m)=\Gamma(a+m)/\Gamma(a)$ । $F_D^{(\gamma)}$ फलन का संप्रयुक्त गणित तथा गणितीय भौतिकी में विशिष्ट महत्व है क्योंकि दीर्घवृत्तीय समाकल $F_D^{(\gamma)}$ [1] प्रकार के हाइपरज्यामितीय फलन हैं।

अनुभाग 2 में हम गणितीय आगमन की प्रविधि का प्रयोग करेंगे और $F_D^{(\gamma)}$ का मान निकालेंगे जब इसके सभी कोणांक इकाई हों। स्पष्ट है कि इस फल का उपयोग विविध रूपान्तरण सूत्रों, फलन श्रेणियों तथा कई चरों वाले फलनों को प्राप्त करने के लिये किया जा सकता है। अनुभाग 3 तथा 4 में एक रूपान्तरण फलन तथा फलन श्रेणी व्युत्पन्न किये गये हैं।

कई चरों वाले सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन को:

$$F_{C: D_1; \ldots; D_\gamma}^{A: B_1; \ldots; B_\gamma}\left[\begin{matrix}(a_A) : (b_{B_1}^{(1)}); \ldots; (b_{B_\gamma}^{(\gamma)}); \\ (c_C) : (d_{D_1}^{(1)}); \ldots; (d_{D_\gamma}^{(\gamma)});\end{matrix}\; z_1, \ldots, z_\gamma\right] \tag{1·2}$$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_\gamma=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{A}(a_i, m_1+\ldots+m_\gamma)\prod_{i=1}^{B1}(b_i^{(1)}, m_1)\ldots\prod_{i=1}^{B\gamma}(b_i^{(\gamma)}, m_\gamma)}{\prod_{i=1}^{C}(c_i, m_1+\ldots+m_\gamma)\prod_{i=1}^{D1}(d_i^{(1)}, m_1)\ldots\prod_{i=1}^{D\gamma}(d_i^{(\gamma)}, m_\gamma)} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{z_\gamma^{m_\gamma}}{m_\gamma!},$$

समिका द्वारा परिभाषित किया जाता है जहाँ

$$A+B_i \leqq C+D_i,\ i=1, 2, \ldots, \gamma\ o\gamma\ if \text{ अथवा यदि}$$
$$A+B_i = C+D_i+1,\ |Z_i|<1,\ i=1, 2, \ldots, \gamma.$$

संक्षेपण की दृष्टि से (a_A) द्वारा A प्राचलों के समुच्चय का बोध कराया गया है $a_1, a_2, \ldots, a_A$; $(b_{B_j}^{(j)})$ B_j प्राचलों के समुच्चय $b_1^{(j)}, \ldots, b_{B_s}^{(j)}, j=1, \ldots, 2, \ldots\gamma$, के लिये आया है। इसी प्रकार (c_C) तथा $(d_{D_\gamma}^{(\gamma)})$ भी आये हैं। रिक्त गुणनफल को इकाई मानना होगा।

वास्तव में (1·2) द्वारा परिभाषित कई चरों वाला सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन श्रीवास्तव तथा डौस्ट [9, p. 454] द्वारा परिभाषित बहुगुणित हाइपरज्यामितीय श्रेणी की विशिष्ट दशा है।

आगे, संक्षेपण की दृष्टि से संकेत $\triangle(\delta, \alpha)$ से प्राचलों का समुच्चय $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\alpha+1}{\delta}, \ldots, \frac{\alpha+\delta-1}{\delta}$ तथा $[\Gamma\triangle(\delta, \alpha)]$ से गुणनफल $\Gamma\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\delta}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{\alpha+\delta-1}{\delta}\right)$, का बोध कराया गया है जहाँ δ धन पूर्णांक है।

2. इस अनुभाग में गणितीय आगमन प्रविधि के सहारे जैसा कि [6, p. 43(1)] में दी गई है, हम निम्नांकित सूत्रों की स्थापना करेंगे।

$$F_D^{(\gamma)}\left[\begin{matrix}\alpha : \beta_1; \ldots; \beta_\gamma; \\ \gamma : -; \ldots; -;\end{matrix}\ 1, 1, \ldots, 1\right] = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_\gamma)}, \quad (2{\cdot}1)$$

जो समस्त धन पूर्णांक γ के लिये है जहाँ $Re\,(\gamma-\alpha-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_\gamma)$ तथा γ न तो शून्य है और न ऋण पूर्णांक।

उपपत्ति

हम γ पर आगमन का प्रयोग करेंगे। हम (2·1) को कोणांक P_γ के रूप में अंकित करते हैं और माना कि प्रत्येक धन पूर्णांक γ के लिये एक एक कोणांक P_γ निश्चित किया जाता है जो या तो सत्य या असत्य हो सकता है। अब P_1 सत्य है क्योंकि $\gamma=1$ अतः (2·1) का वामपक्ष ${}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha, \beta_1 & 1\\ \gamma & \end{matrix}\right)$ हो जाता है और इस प्रकार

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha, \beta_1 & \\ \gamma & 1\end{matrix}\right) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta_1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta_1)}, \quad (2{\cdot}2)$$

जो गॉस का सुप्रसिद्ध सूत्र है। अब कल्पना करें कि P_γ किसी γ के लिये सत्य है। अतः $P_{\gamma+1}$ को भी सत्य होना हैं। हमें ज्ञात है कि

$$F_D^{(\gamma+1)}\left[\begin{matrix}\alpha : \beta_1; \ldots; \beta_{\gamma+1}; \\ \gamma : -; \ldots; - :\end{matrix}\ 1, 1, \ldots, 1\right]$$

$$= \sum_{m_{\gamma+1}=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m_{\gamma+1})(\beta_{\gamma+1}, m_{\gamma+1})}{(\gamma, m_{\gamma+1})\ m_{\gamma+1}!} \times F_D^{(\gamma)}\left[\begin{matrix}\alpha+m_{\gamma+1} : \beta_1; \ldots; \beta_\gamma; \\ \gamma+m_{\gamma+1} : -; \ldots; -;\end{matrix}\ 1, 1, \ldots, 1\right].$$

चूँकि P_γ सत्य है अतः

$$F_D^{(\gamma+1)}\begin{bmatrix}\alpha:\beta_1;\ldots;\beta_{\gamma+1}; & 1,1,\ldots,1\\ \gamma:-;\ldots;-; & \end{bmatrix}$$

$$=\sum_{m_{\gamma+1}=0}^{\infty}\frac{(\alpha,m_{\gamma+1})(\beta_{\gamma+1},m_{\gamma+1})\Gamma(\gamma+m_{\gamma+1})\Gamma(\gamma-\alpha-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_\gamma)}{(\gamma,m_{\gamma+1})\,m_{\gamma+1}!\,\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma+m_{\gamma+1}-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_\gamma)},$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_\gamma)}\ {}_2F_1\begin{bmatrix}\alpha,\beta_{\gamma+1};\\ \gamma-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_\gamma;\end{bmatrix}.$$

गॉस के सूत्र (2·2) की सहायता से ${}_2F_1$ का मान निकालने पर हमें

$$F_D^{(\gamma+1)}\begin{bmatrix}\alpha:\beta_1;\ldots;\beta_{\gamma+1}; & 1,1,\ldots,1\\ \gamma:-;\ldots;-; & \end{bmatrix}=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_{\gamma+1})}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_{\gamma+1})}.$$

प्राप्त होता है। अतः $P_{\gamma+1}$ सत्य है यदि P_γ सत्य है। चूँकि ऊपर बताया जा चुका है कि P_γ सत्य है अतः समस्त P_γ सत्य हैं अर्थात् समस्त धन पूर्णांक γ के लिये (2·1) लागू होता है।

विशिष्ट दशायें

$r=2$ रखने पर हमें

$$F\begin{bmatrix}\alpha:\beta_1;\beta_2; & 1\ 1\\ \gamma:-;-; & \end{bmatrix}=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta_1-\beta_2)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta_1-\beta_2)}, \tag{2·3}$$

प्राप्त होता है जहाँ F_1 ऐपेल का प्रथम फलन है। यह महाजन[7] द्वारा ज्ञात किया हुआ फल है।

3. (2·1) के सम्प्रयोग के रूप में यहाँ पर निम्नांकित रूपान्तरण सूत्र सिद्ध करेंगे

$$(1-z_1)^{-\beta_1}\ldots(1-z_\gamma)^{-\beta_\gamma}F_D^{(\gamma)}\begin{bmatrix}\gamma-\alpha:\beta_1;\ldots;\beta_\gamma; & \frac{-z_1}{1-z_1},\ldots,\frac{-z_\gamma}{1-z_\gamma}\\ \gamma:-;\ldots;-; & \end{bmatrix} \tag{3·1}$$

$$=F_D^{(\gamma)}\begin{bmatrix}\alpha:\beta_1;\ldots;\beta_\gamma; & z_1,\ldots,z_\gamma\\ \gamma:-;\ldots;-; & \end{bmatrix}$$

जहाँ $|z_i|<1$ तथा $\left|\frac{z_i}{1-z_i}\right|<1,\ i=1,2,\ldots,\gamma.$

उपपत्ति

(3·1) को सिद्ध करने के लिये हम इसके बाम पक्ष Ω (माना कि) से प्रारम्भ करते हैं और (1·1) से प्रतिस्थापन करके :

$$\Omega=\sum_{m_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{m_\gamma=0}^{\infty}\frac{(\gamma-\alpha,M)(\beta_1,m_1)\ldots(\beta_\gamma,m_\gamma)(-1)^M z_1^{m_\gamma}\ldots z_\gamma^{m_\gamma}}{(\gamma,M)\,m_1!\ldots m_\gamma!\,(1-z_1)^{\beta_1+m_1}\ldots(1-z_\gamma)^{\beta_\gamma+m_\gamma}}$$

प्राप्त करते हैं, जहाँ हमने संक्षेपण की दृष्टि से संकेतन $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_\gamma$ का प्रयोग किया है जिसे पूरे शोधपत्र में प्रयुक्त करेंगे।

अब फल $(1-z)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a, n)}{n!} z^n$ का उपयोग करते हुये तथा आन्तरिक और वाह्य संकलनों का चिन्ह परस्पर विनिमय करते हुये (क्योंकि सन्निहित श्रेणी के परम अभिरण के कारण वैध है)

$$\Omega = \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_\gamma=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{m_\gamma=0}^{\infty} \frac{(\gamma - a, M)(\beta_1, m_1) \ldots (\beta_\gamma, m_\gamma)}{(\gamma, M)\, m_1! \ldots m_\gamma!} (-1)^M$$

$$\times \frac{(\beta_1 + m_1, k_1)}{k_1!} \ldots \frac{(\beta_\gamma + m_\gamma, k_\gamma)}{k_\gamma!} z_1^{m_1+k_1} \ldots z_\gamma^{m_\gamma+k_\gamma}.$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_\gamma=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{k_1} \ldots \sum_{m_\gamma=0}^{k_\gamma} \frac{(\gamma - a, M)(\beta_1, m_1) \ldots (\beta_\gamma, m_\gamma)}{(\gamma, M)\, m_1! \ldots m_\gamma!} (-1)^M$$

$$\times \frac{(\beta_1 + m_1, k_1 - m_1)}{(k_1 - m_1)!} \ldots \frac{(\beta_\gamma + m_\gamma, k_\gamma - m_\gamma)}{(k_\gamma - m_\gamma)!} z_1^{k_1} \ldots z_\gamma^{k_\gamma}.$$

प्रारम्भिक सम्बन्ध [8, p. 32]:

$$(\lambda, n-k) = \frac{(-1)^k (\lambda, n)}{(1 - \lambda - n, k)} \text{ तथा } (-n, k) = \frac{(-1)^k\, n!}{(n-k)!}, \; (0 \leq k \leq n),$$

का उपयोग करने पर हमें

$$\Omega = \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_\gamma=0}^{\infty} \frac{(\beta_1, k_1) \ldots (\beta_\gamma, k_\gamma)}{k_1! \ldots k_\gamma!} z_1^{k_1} \ldots z_\gamma^{k_\gamma}$$

$$\times F_D^{(\gamma)} \left[\begin{matrix} \gamma - a : -k_1; \ldots; -k_\gamma; \\ \gamma : -; \ldots; -; \end{matrix} \; 1, 1, \ldots 1 \right].$$

प्राप्त होगा। (2·1) के साथ ही कुछ और सरलीकरण के द्वारा हमें वांछित फल (3·1) की प्राप्ति होती है।

हमारा सूत्र (3·1) ज्ञात सूत्र

$$(1 - z_1)^{-\beta_1} (1 - z_2)^{-\beta_2} F_1 \left[\begin{matrix} \gamma - a : \beta_1; \beta_2; \\ \gamma : -; -; \end{matrix} \; \frac{z_1}{z_1 - 1}, \frac{z_2}{z_2 - 1} \right]$$

$$=F_1\begin{bmatrix}\alpha:\beta_1;\beta_2; & z_1, z_2\\ \gamma:-;-; & \end{bmatrix},$$

का सार्वीकरण है जो एक अन्य ज्ञात फल [8, p. 60 (4)]

$$(1-z)^{-\alpha}\ {}_2F_1\begin{bmatrix}\alpha, \gamma-\beta; & \dfrac{z}{z-1}\\ \gamma; & \end{bmatrix}={}_2F_1\begin{bmatrix}\alpha, \beta; & z\\ \gamma; & \end{bmatrix}$$

का सार्वीकरण है ।

4. इस अनुभाग में हम निम्नांकित फलन श्रेणी की स्थापना करेंगे :

$$\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_\gamma=0}^{\infty}\frac{\delta^{2(m_1+\cdots+m_\gamma)}}{\Gamma(\gamma+m_1+\cdots+m_1)\,[\Gamma\triangle(\delta,\rho-m_1-\cdots-m_\gamma)\,m_1!\ldots m_\gamma!}$$

$$\times\prod_{i=1}^{\gamma}\Big[\Gamma\triangle(\delta,\sigma_i-m_i)\Big]^{-1} F^{A\,:\,B_1;\,\cdots;\,B_\gamma}_{C+\delta\,:\,D_1+\delta;\,\cdots;\,D_\gamma+\delta}\begin{bmatrix}(a_A) & : \\ (c_C),\triangle(\delta,\rho-m_1-\cdots\ m_\gamma) & :\end{bmatrix} \qquad (4\cdot1)$$

$$\begin{bmatrix}(b^{(1)}_{B_1});\ldots;(b^{(\gamma)}_{B_\gamma}); & \\ (d^{(1)}_{D_1}),\triangle(\delta,\sigma_1-m_1\};\ldots;(d^{(\gamma)}_{D_\gamma}),\triangle(\delta,\sigma_\gamma-m_\gamma); & z_1,\ldots,z_\gamma\end{bmatrix}$$

$$=\frac{2^{\gamma+\rho+\sigma_1+\cdots\sigma_\gamma-\gamma-2}[\Gamma\triangle(2\delta,\gamma+\rho+\sigma_1+\cdots+\sigma_\gamma-\gamma-1)]}{\Gamma(\frac{1}{2})\delta^{\gamma-1/2}[\Gamma\triangle(\sigma,\gamma+\rho-1)][\Gamma\triangle(\delta,\gamma+\sigma_1+\cdots+\sigma_\gamma-\gamma)][\Gamma\triangle(\delta,\rho)]}$$

$$\times\prod_{i=1}^{\gamma}\Big[\Gamma\triangle(\delta,\sigma_i)\Big]^{-1} F^{A+2\delta\,:\,B_1;\,\cdots;\,B_\gamma}_{C+3\delta\,:\,D_1+\delta;\,\cdots;\,D_\gamma+\delta}$$

$$\times\begin{bmatrix}(a_A),\triangle(2\delta,\gamma+\rho+\sigma_1+\cdots+\sigma_\gamma-\gamma-1),\\ (c_C),\triangle(\delta,\gamma+\rho-1),\triangle(\delta,\gamma+\sigma_1+\cdots+\sigma_\gamma-\gamma),\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} :(b^{(1)}_{B_1});\ldots;(b^{(\gamma)}_{E_\gamma}; & \\ \triangle(\delta,\rho):(d^{(1)}_{D_1}),\triangle(\delta,\sigma_1);(d^{(\gamma)}_{D_\gamma}),\triangle(\delta,\sigma_\gamma); & 2^{2\delta}z_1,\ldots,2^{2\delta}z_\gamma\end{bmatrix}.$$

बशर्ते

$$A+B_i\leqq C+D_i+2\delta,\ i=1,2,\ldots,\gamma, \text{ अथवा यदि}$$

$$A+B_i=C+D_i+2\delta+1,\ |z_i|<1,\ i=1,2,\ldots,\gamma.$$

उपपत्ति

(4.1) को सिद्ध करने के लिये हम इसके वाम पक्ष L से प्रारम्भ करेंगे और F फलन को (1·2) की सहायता से हाइपरज्यामितीय श्रेणी के रूप में व्यक्त करेंगे तथा आन्तरिक और वाह्य संकलनों के क्रम को विनिमयित करके

$$L=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k\gamma=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{A}(a_i,k)\prod_{i=1}^{B1}(b_i^{(1)},k_1)\cdots\prod_{i=1}^{B\gamma}(b_i^{(\gamma)},k_\gamma)}{\prod_{i=1}^{C}(c_i,k)\prod_{i=1}^{D1}(d_i^{(1)},k_1)\cdots\prod_{i=1}^{D\gamma}(d_i^{(\gamma)},k_\gamma)}\frac{z_1^{k_1}}{k_1!}\cdots\frac{z_\gamma^{k\gamma}}{k_\gamma}$$

$$\times\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m\gamma=0}^{\infty}\frac{(\delta)^{2M}}{(\gamma,M)m_1!\ldots m_\gamma!}\overset{\pi}{[(\rho,\mathrm{M},k)(\sigma_1,m_1,k_1)\ldots(\sigma_\gamma,m_\gamma,k_\gamma)]}$$

$$\left[\prod_{i=1}^{\delta-1}\left\{\left(\frac{\rho-M+i}{\delta},k\right)\Gamma\left(\frac{\rho-M+i}{\delta}\right)\right\}\right]^{-1}, \quad (4\cdot2)$$

प्राप्त करेंगे जहाँ $\overset{\pi}{(\rho,M,k)(\sigma_1,m_1,k_1)\ldots(\sigma_\gamma,m_\gamma,k_\gamma)]}$ से यह अर्थ निकालना होगा कि (ρ, M, k) वाले गुणनफल को एक ऐसे ही गुणनफल से गुणा करना होगा जिसमें ρ, M तथा K के स्थान पर क्रमशः σ_1, m_1 तथा K_1 रखा जाता है; फिर ρ को σ_2 द्वारा, M को m_2 द्वारा और K को K_2 द्वारा प्रतिस्थापित करते हैं और इसी प्रकार करते हुए अंत में σ को σ_γ, m को m_γ तथा K को K_γ द्वारा प्रतिस्थापित करते है:

पूर्ववत् $M_1=m_1+m_2+\ldots+m_\gamma$, सूत्र $K=\mathrm{k}_1+k_2+\ldots+k_\gamma$

$$\times[\Gamma\triangle(\delta,\alpha-\gamma)]=[(\triangle(\delta,\alpha)](-\delta)^\gamma/(1-\alpha,\gamma). \quad (4\cdot3)$$

की सहायता से (4·2) की अंतिम पंक्ति

$$\overset{\pi}{[(\rho,k)(\sigma_1,k_1)\ldots(\sigma_\gamma,k_\gamma)]}\left[\prod_{i=0}^{\delta-1}\left\{\left(\frac{\rho+i}{\delta},k\right)\Gamma\left(\frac{\rho+i}{\delta}\right)\right\}\right]$$

$$\times F_D^{(\gamma)}\left[\begin{matrix}1-\rho-\delta k:1-\sigma_1-\delta k_1;\ldots;1-\sigma_\gamma-\delta k_\gamma;\\ \gamma:-;\ldots;-;\end{matrix}\right],$$

हो जाती है जहाँ $\overset{\pi}{[(\rho,k)(\sigma_1,k_1)\ldots(\sigma_\gamma,k_\gamma)]}$ बताता है कि (ρ, k) के गुणनफल को ऐसे ही गुणनफल से गुणा करना होगा जहाँ ρ को σ_1 द्वारा तथा k को k_1 द्वारा और फिर ρ को σ_2 द्वारा, k को k_2 द्वारा और इसी प्रकार अंत में ρ को σ_γ तथा k को k_γ द्वारा प्रतिस्थापित करते हैं ।

यह हम अपने सूत्र (2·1) को $F_D^{(\gamma)}$ का मान निकालने के लिये प्रयुक्त करते हैं और गामा गुणन सूत्र

$$\Gamma(mz)=(2\pi)^{1/2-1/2m}\, m^{mz-1/2} \prod_{i=0}^{\delta-1} \Gamma\left(z+\frac{i}{m}\right) \tag{4·4}$$

की सहायता से सरलीकरण करते हैं तो हमें तुरन्त (4·1) प्राप्त होता है।

विशिष्ट दशायें :

उपयुक्त प्रतिबन्धों के अन्तर्गत सूत्र से कई विशिष्ट दशायें प्राप्त की जा सकती हैं। उदाहरणार्थ $\gamma=1$, $z_1=-\frac{1}{2}$, $z_2\to 0, \ldots, z_\gamma\to 0$, $B_1=D_1=0$, $m_1=m$, $\sigma_1=\sigma$ से हमें

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta^{2m}}{m!\,\Gamma(\gamma+m)\,[\Gamma\triangle(\delta,\rho-m)]\,[\Gamma\triangle(\delta,\sigma-m)]} \times {}_AF_{C+2\delta}\left[\begin{matrix}(a_A) \\ (c_C),\ \triangle(\delta,\rho-m),\ \triangle(\delta,\sigma-m)\end{matrix}\ -\frac{1}{z}\right] \tag{4·5}$$

$$=\frac{2^{\gamma+\rho+\sigma-3}\,[\Gamma\triangle(2\delta,\gamma+\rho-2)]}{\Gamma(\frac{1}{2})\delta^{\gamma-1/2}\,[\Gamma\triangle(\delta,\gamma+\rho-1)]\,[\Gamma\triangle(\delta,\gamma+\sigma-1)]\,[\Gamma\triangle(\delta,\rho)]\,[\Gamma\triangle(\delta,\sigma)]}$$

$$\times {}_{A+2\delta}F_{C+4\delta}\left[\begin{matrix}(a_A),\ \triangle(2\delta,\gamma+\rho+\sigma-2) \\ (c_C),\ \triangle(\delta,\gamma+\rho-1),\ \triangle(\delta,\gamma+\sigma-1),\ \triangle(\delta,\rho),\ \triangle(\delta,\sigma)\end{matrix}\ -\frac{1}{z}\right].$$

प्राप्त होता है। अब दोनों ओर $\prod_{i=1}^{A}\Gamma(a_i)\Big/\prod_{i=1}^{C}\Gamma(c_i)$ से गुणा करने तथा हाइपरज्यामितीय फलन को सूत्र [5 p. 352]

$$E(p;\alpha_\gamma:q;\rho_S:z)=\frac{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_p)}{\Gamma(\rho_1)\ldots\Gamma(\rho_S)}\,{}_pF_q\left(p;\alpha_\gamma:q;\rho_S:-\frac{1}{z}\right),$$

की सहायता से मैकराबर्ट फलन में रूपान्तरित करने पर हमें

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\delta^{2m}}{m!\,\Gamma(\gamma+m)}\,E\left[\begin{matrix}(a_A), \\ (c_C),\ \triangle(\delta,\rho-m),\ \triangle(\delta,\sigma-m)\end{matrix}\ z\right]$$

$$=\frac{2^{\gamma+\rho+\sigma-3}}{\Gamma(\frac{1}{2})\delta^{\gamma-1/2}}\,E\left[\begin{matrix}(a_A),\ \triangle(2\delta,\gamma+\rho+\sigma-2) \\ (c_C),\ \triangle(2\delta,\gamma+\rho-1),\ \triangle(\delta,\gamma+\sigma-1),\ \triangle(\delta,\rho),\ \triangle(\delta,\sigma)\end{matrix}\ 2^{-2\delta}z\right],$$

प्राप्त होगा जो मैकराबर्ट [6, p. 135 (15)] द्वारा सिद्ध किया फल है।

निर्देश

1. कार्लसन, बी० सी०, जर्न० मैथ० एण्ड फिजि०, 1961, **40**, 125-34
2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Transcendental function भाग I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1963
3. लारिसेला, जी०, Rend, Circ, Mat, Palermo 1893, 7, 111-158
4. मैकराबर्ट, टी० एम०, Math. Annalen 1959, **139**, 133-139
5. वही, Function of Complex variables पंचम संस्करण, मैकमिलन०, न्यूयार्क, 1963
6. मास्टो, जी० डी०, सैम्पसन, जे० एच० तथा मेयर, जे० पी०, Fundamental structure of Algebra.
7. महाजन, जी० बी०, Mathematics Education 1974, 8, 80-86
8. रेनविले, ई० डी०, Special function, मैकमिलन न्यूयार्क 1963
9. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा डाउस्ट, एम० सी०, Nederal. Akad. Wetensch, Proc. Ser. A 72 Indag Math. 1969, **31**, 449-457

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 1, January, 1976, Pages, 25-34

H-फलन से सम्बद्ध अरैखिक अवकल समीकरण के लिये जैकोबी बहुपदों का सम्प्रयोग

बी० एम० श्रीवास्तव
गणित विभाग, राजकीय विज्ञान महाविद्यालय, रीवाँ
तथा
फतेह सिंह
ऐप्लाइड गणित विभाग, राजकीय इंजीनियरी कालेज, रीवाँ

[प्राप्त—फरवरी 4, 1975]

सारांश

लेखकों ने रैखिक जैकोबी बहुपद सन्निकटन का उपयोग एक अत्यन्त सामान्य अरैखिक अवकल समीकरण

$$\ddot{x}+\omega\, H^{x,\, l}_{p,\, q}\left[\mu\left(1+\frac{x}{A}\right)^{m}\left|\begin{matrix}\{(a_p,\, e_p)\}\\ \{(b_q,\, f_q)\}\end{matrix}\right.\right]=NF(t),$$

सिद्ध करने के लिये किया है जहाँ H-फलन की परिभाषा फाक्स [2, p. 408] के अनुसार है।

Abstract

Applications of Jacobi polynomials to non-linear differential equation associated with H-function. *By* B. M. Shrivastava, Department of Mathematics, Government Science College, Rewa, and F. Singh, Department of Applied Mathematics, Government Engineering College, Rewa (M. P.).

In an attempt to generalize and unify some earlier results given by Garde, Saxena and Kushwaha, Khan and several other results found in the literature, the authors have applied the Linear Jacobi polynomial approximation to solve a most general non-linear differential equation

$$\ddot{x}+\omega\, H^{k,\, l}_{p,\, q}\left[\mu\left(1+\frac{x}{A}\right)^{m}\left|\begin{matrix}\{(a_p,\, e_p)\}\\ \{(b_q,\, f_q)\}\end{matrix}\right.\right]=N\, F(t),$$

where H-function has been defined by Fox [2, p. 408].

1. **विषय प्रवेश :**

इंजीनियरी तथा भौतिकी में विश्लेषण का अधिकांश ऐसी स्पंदनशील प्रणाली वाली समस्याओं के अध्ययन से सम्बद्ध होता है जिनमें सन्निकटन की विधि द्वारा अरैखिक अवकल समीकरणों के सिद्ध करने की आवश्यकता पड़ती है। प्रस्तुत शोधपत्र में लेखकों ने एक प्रतिरोधरहित परिपथ का विश्लेषण दिया है जिसमें एक अरैखिक धारित्र सामान्य प्रकृति वाले बाह्य आवर्ती बल के अन्तर्गत रहता है।

हमने सक्सेना तथा कुशवाहा[9] का अनुसरण करते हुये गर्दे[3] तथा खान[5] के परिणामों का सार्वीकरण किया है और जैकोबी बहुपदों का उपयोग सामान्य प्रकार के अरैखिक अवकल समीकरण का रैखिक आयाम आश्रित सन्निकट हल प्राप्त करने के लिये किया है

$$\ddot{x}+\omega H_{p,q}^{k,l}\left[\mu\left(1+\frac{x}{A}\right)^m\middle|\begin{matrix}\{(a_p,f_p)\}\\\{(b_q,e_q)\}\end{matrix}\right]=N\,F(t). \qquad (1\cdot1)$$

जहाँ $H_{p,q}^{k,l}\left[\cdots\middle|\begin{matrix}\{(\ldots)\}\\\{(\ldots)\}\end{matrix}\right]$ फाक्स [2, p. 408] द्वारा चलाया गया H-फलन है और निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$$H_{p,q}^{k,l}\left[x\middle|\begin{matrix}\{(a_p,e_p)\}\\\{(b_q,f_q)\}\end{matrix}\right]=H_{p,q}^{k,l}\left[x\middle|\begin{matrix}(a_1,e_1),\ldots,(a_p,e_p)\\(b_1,f_1),\ldots,(b_q,f_q)\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=1}^{k}\Gamma(b_j-f_js)\prod_{j=1}^{l}\Gamma(1-a_j+e_js)}{\prod_{j=k+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod_{j=l+1}^{p}\Gamma(a-e_js)}x^s\,ds \qquad (1\cdot2($$

जहाँ x शून्य के तुल्य नहीं है और रिक्त गुणनफल की विवेचना इकाई के रूप में दी जाती है ; p, q, k तथा l ऐसे पूर्णांक हैं कि $1\leqslant k\leqslant q$, $0\leqslant l\leqslant p$, $e_j(j=1,\ldots,p)$, $f_h(h=1,\ldots,q)$ धन पूर्णांक हैं तथा $a_j(j=1,\ldots,p)$, $b_h(=1,\ldots,q)$ सम्मिश्र संख्यायें हैं। L बार्नीज प्रकार का ऐसा उपयुक्त कंटूर है कि $\Gamma(b_j-f_js)(j=1,\ldots,k)$ के पोल L के दाईं ओर तथा $\Gamma(1-a_j+e_js)(j=1.\ldots,l)$ के पोल बाईं ओर पड़ें। वे सामान्य प्रारम्भिक प्रतिबन्ध जिनके अन्तर्गत (1·1) का हल प्राप्त किया जा सकता है उन्हें $t=0$ पर $x=A(A-1)$ तथा $x=0$ के रूप में माना जा सकता है जहाँ $A(A-1)$ गति का आयाम है।

गति विज्ञान के कुछ प्रश्नों के लिये कतिपय सम्प्रयोग इस शोधपत्र के अन्त में दिये गये हैं। स्थिर गोले पर किसी गोले की गति जो मरे [6, p. 303] द्वारा दी गई है तथा कतिपय अरैखिक प्रणालियों के मुक्त दोलन जो पाइप्स [7, p. 664] में प्राप्य हैं उनकी विवेचना की गई है। यही नहीं मरे तथा पाइप्स के परिणामों को संशोधित किया गया है। इसके लिये निम्नलिखित समीकरणों से $\sin x$ को x न मान कर $\sin x$ के लिये जैकोबी बहुपद का सन्निकट प्रयुक्त किया गया है

$$\ddot{x}=\frac{-g}{l}\sin x+2\omega\cos\lambda\dot{y}, \tag{1·3}$$

$$\ddot{y}=\frac{-g}{l}\sin y-2\omega\cos\lambda\dot{x}, \tag{1·4}$$

तथा
$$\ddot{x}=-\omega^2\sin x+\infty(\dot{x})^2. \tag{1·5}$$

जहाँ (1·5) में ऋण x-अक्ष की दिशा में वेग है ।

अपनी शोधों में हमें निम्नांकित सूत्रों की आवश्यकता होगी :

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,H_{p,q}^{k,l}\left[\mu(1+x)^m\left|\begin{matrix}\{(a_p,e_p)\}\\ \{(b_q,f_q)\}\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$=\frac{2^{1+\sigma+\beta}\,\Gamma(1+\alpha+n)}{n\,!}H_{p+2,\,q+2}^{k,\,l+2}\left[\mu_2^m\left|\begin{matrix}(-\beta,m),(0,m),\{(a_p,e_p)\}\\ (\{b_q,f_q\}),(-\alpha-\beta-n-1,m),(n,m)\end{matrix}\right.\right], \tag{1·6}$$

बशर्ते कि $\overline{m}$ धन पूर्णांक है, $R(1+\infty)>0$, $R\left(1+\beta+\frac{mb_j}{f_j}\right)>0\ (j=1,\ldots,k)$, $\sum_{j=1}^{k}f_j-\sum_{j=k+1}^{q}f_j$ $+\sum_{j=1}^{l}e_j-\sum_{j=l+1}^{p}e_j\equiv M>0$, $\sum_{j=1}^{p}e_j-\sum_{j=1}^{q}f_j=\tau\leqslant 0$ तथा $|\arg\mu_2^m|<\frac{1}{2}\pi M$.

परिणाम (1·6) सिंह द्वारा प्राप्त एक नूतन फल का प्रतिफल है [10, p. 110] जिसमें h को 1, a_1 को $-n$, β को $1+\sigma$, a_2 को $1+\alpha+\beta+n$. z_1 को μ_2^m, x को $\frac{1+x}{2}$, ρ को $1+\beta$ द्वारा प्रतिस्थापित किया गया है और ${}_2F_1$ को जैकोबी बहुपदों में व्यक्त किया गया है ।

2. जैकोबी बहुपद तथा रैखिक सन्निकटन :

जैकोबी बहुपदों को अन्तराल $(-A, A)$ में भार फलन $\left(1-\frac{x}{A}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{x}{A}\right)^{\beta}$ के प्रति बहुपदी लाम्बिक के समुच्चय के रूप में परिभाषित किया जा सकता है । इससे $P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{A}\right)$ प्राप्त होता है ।

ऐसे फलन $f(x)$, के लिये जो अन्तराल $(-A, A)$ में जैकोबी बहुपदों के पदों में प्रसारित किया जा सकता है, हम

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(\alpha,\beta)}\;P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{A}\right), \tag{2·1}$$

प्राप्त करते हैं जहाँ गुणांक $a_n^{(\alpha,\beta)}$ को

$$a_n^{(\alpha,\beta)}=\frac{\int_{-1}^{1}f(Ax)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx}{\int_{-1}^{1}\left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx} \tag{2·2}$$

द्वारा दिया जाता है ।

यदि श्रेणी (2·1) द्वितीय पद के बाद खंडित हो जाय तो हमें एक रैखिक सन्निकटन प्राप्त होगा।

$$f_*()=a_0^{(\alpha,\beta)}\ P_0^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{A}\right)+a_1^{(\alpha,\beta)}\ P_1^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{A}\right). \tag{2·3}$$

जहाँ तारांकित से सन्निकटन सूचित किया गया है।

3. जैकोबी बहुपदों का अरैखिक अवकल समीकरण में सम्प्रयोग :

इस अनुभाग में हम अरैखिक अवकल समीकरण

$$\ddot{x}+f(x)=NF(t), \tag{3·1}$$

को हल करेंगे जिसमें रैखिक जैकोबी बहुपदों की सहायता से अन्तराल $(-A, A)$ में $f(x)$ के सन्निकटीकरण से

$$f(x)=\omega H_{p,\,q}^{k,\,l}\left[\mu\left(1+\frac{x}{A}\right)^m\middle|\begin{matrix}\{(a_p,e_p)\}\\\{(b_q,f_q)\}\end{matrix}\right],$$

(2·3) से हमें

$$f_*(x)=\left(\omega\ H_{p,\,q}^{k,\,l}\left[\mu\left(1+\frac{x}{A}\right)^m\middle|\begin{matrix}\{(a_p,e_p)\}\\\{(b_q,f_q)\}\end{matrix}\right]\right)_*=a_0^{(\alpha,\beta)}\ P_0^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{A}\right)+a_1^{(\alpha,\beta)}\ P_1^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{A}\right)$$

$$=a_0^{(\alpha,\beta)}+a_1^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{2+\alpha+\beta}{2}\,\frac{x}{A}\right], \tag{3·2}$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$a_0^{(\alpha,\beta)}=\frac{\int_{-1}^{1}\omega\ H_{p,\,q}^{k,\,l}\left[\mu(1+x)^m\middle|\begin{matrix}\{(a_p,e_p)\}\\\{(b_q,f_q)\}\end{matrix}\right]P_0^{(\alpha,\beta)}(x)(1+x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx}{\int_{-1}^{1}\left[P_0^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx}$$

तथा

$$a_1^{(\alpha,\beta)}=\frac{\int_{-1}^{1}\omega\ H_{p,\,q}^{k,\,l}\left[\mu(1+x)^m\middle|\begin{matrix}\{(a_p,e_p)\}\\\{(b_q,f_q)\}\end{matrix}\right]B_1^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx}{\int_{-1}^{1}\left[P_1^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx}$$

परिणाम (1·6) तथा [8, p. 260] का उपयोग करने पर ज्ञात होता है कि

$$a_0^{(\alpha,\beta)}=\omega\frac{\Gamma(2+\alpha+\beta)}{\Gamma(1+\beta)}\,H_{p+1,\,q+1}^{k,\,l+1}\left[\mu_2{}^m\middle|\begin{matrix}(-\beta,m),\{(a_p,c_p)\}\\\{(b_q,f_q)\},(1-\alpha-\beta-1,m)\end{matrix}\right], \tag{3·3}$$

तथा

$$a_1^{(\alpha,\beta)}=\frac{\omega(\alpha+\beta+3)\ \Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(2+\beta)}\,H_{p+2,\,q+2}^{k,\,l+2}\left[\mu_2{}^m\middle|\begin{matrix}(-\beta,m),(0,m),\{(a_p,c_p)\}\\\{(b_q,f_q)\},(-\alpha-\beta-2,m),(1,m)\end{matrix}\right], \tag{3·4}$$

$f(x)$ को इसके सन्निकटन $f_*(x)$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर (3·1) निम्नांकित प्रकार से परिवर्तित हो जाता है :

$$\ddot{x}+a_0^{(\alpha,\beta)}a_0^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{(2+\alpha+\beta)}{2}\frac{x}{A}\right]=NF(t), \tag{3·5}$$

या

$$\ddot{x}+\gamma^2 x=-\frac{(\alpha-\beta)A}{(2+\alpha+\beta)}(\gamma^2-\gamma_1^2)+NF(t), \tag{3·6}$$

जहाँ

$$\gamma^2=\frac{(2+\alpha+\beta)}{2A}a_1^{(\alpha,\beta)} \quad \text{तथा} \quad \gamma_1^2=\frac{(2+\alpha+\beta)}{(\beta-\alpha)A}a_0^{(\alpha,\beta)}. \tag{3·7}$$

$a_0^{(\alpha,\beta)}$ तथा $a_1^{(\alpha,\beta)}$ के मान क्रमशः (3·3) तथा (3·4) में दिये हुये हैं।

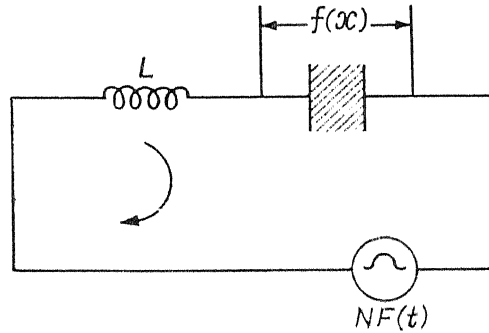
(3·6) का सन्निकट सामान्य हल प्रारम्भिक प्रतिबन्धों $x=A(A-1)$, $t=0$ पर $\dot{x}=0$ के अन्तर्गत

$$x_*=\left[A(A-1)+\frac{(\alpha-\beta)A}{(2+\alpha+\beta)}\left(1-\frac{\gamma_1^2}{\gamma^2}\right)\right]\cos\gamma t-\frac{(\alpha-\beta)A}{(2+\alpha+\beta)}\left(1-\frac{\gamma_1^2}{\gamma^2}\right)$$
$$+\frac{N}{\gamma}\int_0^t F(u)\sin\gamma(t-u)\,du \tag{3·8}$$

द्वारा दिया जाता है जो अत्यन्त सामान्य सन्निकट हल है और (3·1) में $F(t)$ के विभिन्न मान देने पर $F(t)$ के संगत सामान्य हल निकाला जा सकता है।

(3·1) का वैद्युत सजात एक परिपथ द्वारा व्यक्त किया जा सकता है जिसमें रैखिक प्रेरक (inductor) L रहता है जो अरैखिक संधारित्र तथा एक आवर्ती विभव $N\,F(t)$ के साथ श्रेणीबद्ध रहता है। यदि संधारित्र की प्लेटों पर आवेश पृथक्करण x हो तो गर्द[4] द्वारा प्राप्त परिपथ का अवकल समीकरण

$$L\,\ddot{x}+f(x)=N\,F(t), \tag{3·9}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ $f(x)$ अरैखिक संधारित्र के आरपार विभव-ह्रास है। सामान्यतया $f(x)$ वोल्टता तथा आवेश के मध्य खींचे गये वक्र के रूप में होता है जिसे संतृप्त वक्र कहते हैं।

अरैखिक संधारित्र वाला प्रतिरोध रहित परिपथ

4. (3·1) में $\omega=\frac{g}{l}\sqrt{(\pi)}$, $k=1$ $l=p=b_2=0$, $b_1=\frac{1}{2}$, $q=m=2$, $\mu=\frac{1}{2}$, $x=A(x-1)$, चुनने पर, तथा [1, p. 434] और [8, p. 115] की सहायता से N-फलन को साइन (ज्या) रूप में परिणत करने तथा स्थानान्तरित करने पर अवकल N समीकरण (1·3) प्राप्त होता है अतः (3·2) से हमें ज्या अरैखिकता का सन्निकट प्राप्त होता है ।

संगत परिवर्तन करने पर (3·7) में γ^2 तथा γ_1^2 के मान क्रमशः γ_2^2 तथा γ_3^2 में परिणत हो जाते हैं जहाँ

$$\gamma_2^2=\frac{g\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\beta+4)}{2Al\,\Gamma(\beta+2)}H^{1,\,2}_{2,\,4}\left[1\left|\begin{matrix}(-\beta,\,2),(0,\,1)\\(\frac{1}{2},\,1),(0,\,1),(-\alpha-\beta-2,\,2),(1,\,2)\end{matrix}\right.\right]. \quad (4·1)$$

तथा

$$\gamma_3^3=\frac{g\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+\beta+3)}{Al(\beta-\alpha)\Gamma(\beta+1)}H^{1,\,1}_{1,\,3}\left[1\left|\begin{matrix}(-\beta,\,2)\\(\frac{1}{2},\,1),(0,\,1),(-\alpha-\beta-1,\,2)\end{matrix}\right.\right], \quad (4·2)$$

प्रारम्भिक प्रतिबन्ध के अन्तर्गत $x=A$, $x=0$, $t=0$ पर

अतः (3.8) की सहायता से (1·3) का सुधरा हुआ सन्निकट हल निम्न प्रकार होगा

$$x_*=\left[A(A-1)+\frac{(\alpha-\beta)A}{(2+\alpha+\beta)}\left(1-\frac{\gamma_3^2}{\gamma_2^2}\right)\right]\cos\gamma_2 t-\frac{(\alpha-\beta)A}{(2+\alpha+\beta)}\left(1-\frac{\gamma_3^2}{\gamma_2^2}\right)$$

$$+\frac{2\omega\cos\lambda}{\gamma_2}\int_0^t\frac{dy}{du}\sin\gamma_2(t-u)\,du, \quad (4·9)$$

उपर्युक्त की ही भाँति अग्रसर होने पर (3·8) से (1·4) का हल प्राप्त किया जा सकता है ।

समाकल समीकरण (1·5) द्वारा ऐसी मुक्त रीति से कम्पनशील प्रणाली के लिये जिसकी अवमन्दन शक्ति वेग के वर्ग के समानुपाती है एक प्रकार की न्यूटनीय अवमन्दित गति चित्रित होती है । (1·5) में (3·2) से ज्या अरैखिता का सन्निकिट मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\ddot{x}+\gamma_2^2x=-\frac{(\alpha-\beta)A}{(2+\alpha+\beta)}(\gamma_2^2-\gamma_3^2)+\alpha(\dot{x})^2. \quad (4·4)$$

प्रथम सन्निकटन के लिये लघु पद $\alpha(\dot{x})^2$ की उपेक्षा कर सकते हैं जिससे इसका हल

$$x_*=E\cos(\gamma_2 t+F)-\frac{(\alpha-\beta)A}{(2+\alpha+\beta)}\left(1-\frac{\gamma_3^2}{\gamma_2^2}\right) \quad (4·5)$$

प्राप्त होता है जहाँ E तथा F काल्पनिक स्थिरांक हैं ।

द्वितीय सन्निकटन के लिये x के इस मान को लघु पद $\alpha(\dot{x})^2$ में रखने पर (4·4) की प्राप्ति होती है ।

$$\ddot{x}+\lambda_2^2 x=-\frac{(\alpha-\beta)A}{(2+\alpha+\beta)}(\gamma_2^2-\gamma_3^2)+\alpha E^2\gamma_2^2\sin^2(\gamma_2 t+F), \tag{4·6}$$

या

$$\ddot{x}+\gamma_2^2 x=-\frac{(\alpha-\beta)A}{(2+\alpha+\beta)}(\gamma_2^2-\gamma_3^2)+\frac{\alpha E^2\gamma_2^2}{2}[1-\cos(2\gamma_2 t+2F)] \tag{4·7}$$

अतः (4·7) का सामान्य हल

$$x_*=E\cos(\gamma_2 t+F)-\frac{(\alpha-\beta)A}{(2+\alpha+\beta)}\left(1-\frac{\gamma_3^2}{\gamma_2^2}\right)+\frac{\alpha E^2}{2}+\frac{\alpha E^2}{6}\cos(2\gamma_2 t+2F). \tag{4·8}$$

होगा जहाँ E तथा F स्थिरांकों को प्रारम्भिक प्रतिबन्धों $x=A, \dot{x}=0$ $t=0$ पर की सहायता से सुनिश्चित किया जा सकता है।

5. समीकरण (3·1) बलकृत अरैखिक मन्दनरहित दोलनों को दर्शाता है। यदि हम $N=0$, रखें तो समीकरण (3·1)

$$\ddot{x}+\omega\, H_{p,\,q}^{k,\,l}\left[\mu\left(1+\frac{x}{A}\right)^m\left|\begin{matrix}\{(a_p,\, e_p)\}\\ \{(b_q,\, f_q)\}\end{matrix}\right.\right]=0 \tag{5·1}$$

में समानीत हो जाता है जो मुक्त अरैखिक मन्दनरहित दोलनों को दर्शाता है।

अतः (3·8) से (5·1) का सन्निकट हल प्रारम्भिक प्रतिबन्धों $x=A(A-1)$, $\dot{x}=0$ पर $t=0$ के अन्तर्गत

$$x_*=\left[A(A-1)+\frac{(\alpha-\beta)A}{(2+\alpha+\beta)}\left(1-\frac{\gamma_1^2}{\gamma^2}\right)\right]\cos\gamma t-\frac{(\alpha-\beta)A}{(2+\alpha+\beta)}\left(1-\frac{\gamma_1^2}{\gamma^2}\right), \tag{5·2}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ γ तथा γ_1 वही हैं जैसे कि (3·7) में।

दोलन का सन्निकट काल

$$T_*=\frac{2\pi}{\gamma} \quad \text{द्वारा दिया जाता है।} \tag{5·3}$$

6. विशिष्ट दशायें :

(i) $k=1, q=m=2, l=p=b_2=0, b_1=\frac{1}{2}, \mu=\frac{1}{4}, x=A(A-1), \omega=\omega_0^2\sqrt{\pi}$ मानने पर तथा γ और γ_1 के मानों में संगत परिवर्तन करने पर गर्दे द्वारा दिये हुये ज्ञात फलों में समानीत होते हैं [3, pp. 117-118].

इसी प्रकार फलों [3, p. 119, (68); (71)] को प्राचलों के उपयुक्त चुनाव द्वारा (5·1) तथा (5·3) से प्राप्त किया जा सकता है।

(ii) (5·1) में $k=1, q=m=2, l=p=b_2=4, b=\frac{1}{2}, \mu=\frac{1}{4}, x=A(A-1)$ रखें, H-फलन को ज्या रूप में समानीत करें, ज्या फलन के स्थान पर इसकी समतुल्य श्रेणी रखें और केवल प्रथम पद रहने दें तो हमें सामान्य आवर्ती गति के लिये परिणाम प्राप्त होता है।

(iii) H-फलन को ज्या रूप में बदलने के लिये (ii) की ही भाँति अग्रसर होने पर और ज्या श्रेणी के पदों को x^3 तक रखने पर तथा x और x^3 के उपयुक्त गुणांक x^3 चुनने पर (5·1),(5·2) तथा (5·3) से समान परिणाम प्राप्त होते हैं [3. p. 111, (13); p. 112, (22) तथा (23)]।

(iv) H-फलन को सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय श्रेणी के रूप में व्यक्त करने और $F(t)=\cos pt$ चुनने पर (1·1) से खान जैसा परिणाम [5. p. 191, (1·1)] प्राप्त किया जा सकता है। γ तथा γ_1 में ऐसा ही परिवर्तन करने पर (3·8) खान द्वारा दिया [3, p, 194, (3·12)] गया फल प्राप्त होता है।

(v) $k=1, q=m=2, l=p=b_2=0, b_1=\frac{1}{2}, \mu=\frac{1}{4}, \omega=\frac{g}{l}\sqrt{\pi}, F(t)=\cos pt, x=A(x-1)$ तथा तदनुसार γ और γ_1 को बदलने पर तथा (1·1) तथा (3·8) से हाल ही में खान द्वारा प्राप्त परिणाम [5, p, 191, (1·2); p. 195, (4·3)] प्राप्त होता है।

7. (i) स्थिर असमतल गोले पर गोले की गति के लिये रैखिक जैकोबी सन्निकटन का सम्प्रयोग :

एक गोला जिसकी त्रिज्या a तथा भार m है वह b त्रिज्या वाले एक स्थिर स्थूल गोले के शीर्ष पर टिका हुआ है। यदि स्थिर गोले को थोड़ा सा विस्थापित किया जाता है जिससे कि वह दूसरे गोले पर नीचे फिसले बिना हिलता डुलता है तो ऐसे गोले की गति के लिये अरैखिक प्रणालियों में लैगरेंज समीकरण [6, p. 284, (16)] का उपयोग करने पर हिलते डुलते समीकरणों को

$$b\phi=a\psi, \tag{7·1}$$

$$T=\tfrac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\phi}^2\tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{5}ma^2(\dot{\phi}+\dot{\psi})^2, \tag{7·2}$$

$$V=mg(a+b)\cos\phi, \tag{7·3}$$

तथा

$$\ddot{\phi}=\frac{5g}{7(a+b)}\sin\phi, \tag{7·4}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ ϕ तथा ψ सार्वीकृत निर्देशांक हैं, T तथा V हिलते डुलते गोले की क्रमशः गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा हैं।

$k=1, q=m=2, l=p=b_2=0, b_1=\frac{1}{2}, \mu=\frac{1}{4}. \omega=-\frac{5g}{7(a+b)}\sqrt{\pi}, x=(x-1)$, (5·1) बदल कर (7·4) हो जाता है औ γ तथा γ_1 के मानों में संगत परिवर्तन करने पर हमें (5·2) से (7·4) का सन्निकट हल प्राप्त होता है :

$$\phi_* = \left[A(A-1) + \frac{(\alpha-\beta)A}{(2+\alpha+\beta)}\left(1-\frac{G_1^2}{G}\right)\right]\cos\gamma t - \frac{(\alpha-\beta)A}{(2+\alpha+\beta)}\left(1-\frac{G_1^2}{G^2}\right), \quad (7{\cdot}5)$$

जहाँ G तथा G_1 क्रमशः नीचे दी हुई विशिष्ट दशा के परिवर्तित मान हैं :

$$G^2 = -\frac{5g\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+\beta+4)}{14A(\alpha+b)\Gamma(\beta+2)} H_{2,\,4}^{1,\,2}\left[1\left|\begin{matrix}(-\beta,2),(0,2)\\(\tfrac{1}{2},1),(0,1),(-\alpha-\beta-2,2),(1,2)\end{matrix}\right.\right],$$

तथा
$$G_1^2 = -\frac{5g\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\beta+3)}{7A(\alpha+b)(\beta-\alpha)\Gamma(1+\beta)} H_{1,\,3}^{1,\,1}\left[1\left|\begin{matrix}(-\beta,2)\\(\tfrac{1}{2},1),(0,1),(-\alpha-\beta-1,2)\end{matrix}\right.\right].$$

(7·5) में दिये गये t के फलन के रूप में ϕ_* के इस मान के लिये (7·1) से सीधे ψ को प्राप्त किया जा सकता है और उसीसे T तथा V के मानों को (7·2) तथा (7·3) से प्राप्त कर सकते हैं ।

(ii) **यांत्रिक दोलायमान प्रणाली के लिये जिसमें कोई भार कमानी से संलग्न है रैखिक जैकोबी सन्निकटन का सम्प्रयोग :**

इस अवस्था में ऐसी प्रणाली के लिये मुक्त कम्पन का समीकरण [7, p. 664]

$$m\ddot{x}+kx+bx^3=0, \quad (7{\cdot}5)$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ $m\ddot{x}$ भार का जड़त्व बल, $kx+bx^3$ कमानी का बल, तथा x भार की ऐसी संतुलन अवस्था में मापा जाता है जब कम्पनों पर प्रतिबल न हो ।

(1·1) में $N=0$, $k=1$, $q=m=2$, $l=p=b_2=0$, $b_1=\frac{1}{2}$, $\mu=\frac{1}{2}$, $x=A(-1)$ रखने पर तथ H-फलन को ज्या रूप में व्यक्त करने के पश्चात् ज्या श्रेणी के प्रसार के केवल दो पदों को लेने पर तथा अन्त में $\frac{\omega}{\sqrt{\pi}}=\frac{k}{m}$, $-\frac{\omega}{3!\sqrt{\pi}}=\frac{b}{m}$ मानने पर हमें (7·6) प्राप्त होता है । अब (3·8) में γ तथा γ_1 के मानों में संगत परिवर्तन करने पर (7·6) का हल x तथा t के पदों में प्राप्त किया जा सकता है ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, क०, Tables of Integral Transforms, भाग II, **मैकग्राहिल**, 1954.
2. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429.
3. गर्द, आर० एम०, **प्रोसी० नेश० एके० साइं० इंडिया**, 1967. **37**, No. 1, 109-120.
4. वही, **इंडियन जर्न० प्योर एप्ला० फिजि०**, 1967, **5**, No. 11, 543-546.
5. खान, आई० ए०, **प्रोसी० नेश० एके० साइं० इंडिया**, 1971, **41**, No. 3. 4, 191-200.

6. मरे, आर० एस०, Theory and Problems of Theoretical Mechanics, शाम पब्लिशिंग कम्पनी, न्यूयार्क

7. पाइप्स, एल० ए०, Applied Mathematics for Engineers and Physicists, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1958, द्वितीय संस्करण

8. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, मैकमिलन, न्यूयार्क, 1960.

9. सक्सेना, आर० के० तथा कुशवाहा, आर० एस०, प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया, 1970, **40**, No. 1, 65-72.

10. सिंह, एफ०, Def. Sci., Jr. 1972, **22**, No. 2, 105-112.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No 1, January, 1976, Pages 35-38

नवीन संक्रियात्मक प्रतिबिम्ब

के० एस० सेवारिया
राजकीय कालेज, जैसलमेर (राजस्थान)

[प्राप्त— सितम्बर 8, 1975]

सारांश

पार्सेवाल-गोल्डस्टीन प्रमेय का उपयोग नवीन समाकल प्राप्त करने के लिये किया गया है।

Abstract

A new operational image in Laplace transform. *By* K. S. Sevaria, Government College, Jaisalmer (Rajsthan).

The Parsewal-Goldstein theorem has been used to obtain new integral.

1. **विषय प्रवेश:**

संकेतन $\phi(p) \doteq f(t)$ का प्रयोग लैप्लास परिवर्त

$$\phi(p)=p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{1}$$

को दिखाने के लिये प्रयुक्त किया जावेगा।

2. पार्सेवाल-गोल्डस्टीन प्रमेय

$$\int_0^\infty \phi(t)g(t)t^{-1}\, dt = \int_0^\infty \psi(t)f(t)t^{-1}\, dt, \tag{2}$$

जहाँ $\phi(p) \doteq f(t)$ तथा $\psi(p) \doteq g(t)$ का प्रयोग निम्नांकित नवीन समाकल प्राप्त करने के लिये किया जावेगा।

$$\int_0^\infty t^{\lambda+\nu-1}\, \psi_2(1+\nu;\, 1+\mu,\, 1+\nu;\, -a^2t,\, -b^2t) \times \psi_2(\lambda;\, 1+2\mu_1,\, \ldots,\, 1+2\mu_n;\, -a_1t,\, \ldots,\, -a_nt)\, dt \tag{3}$$

$$=\Gamma(\lambda+\nu)b^{-2\lambda-2\nu}\, F_c\left[\lambda,\, \lambda+\nu;\, 1+2\mu_1,\, \ldots,\, 1+2\mu_n,\, 1+\mu;\, -\frac{a_1}{b^2},\, \ldots,\, -\frac{a_n}{b^2},\, \frac{a^2}{b^2}\right],$$

$$R(\lambda+\nu)>0,\ R[(b\pm a)^2+(\sqrt{a_1}\pm a_2\pm\cdots\pm\sqrt{a_n})^2]>0. \quad (3)$$

3. **उपपत्ति:**

यदि हम [1, p. 187 (43)] लें

$$f(t)=t^{\sigma-1}\prod_{i=1}^{n}[J_{2\mu i}(2ai^{1/2}t^{1/2})]$$

$$\doteqdot\frac{\Gamma(\sigma+M)\prod_{i=1}^{n}(a_i^{\mu i})}{p^{\sigma+M-1}\prod_{i=1}^{n}[\Gamma(1+2\mu_i)]}$$

$$\times\psi_2\left(\sigma+M;\, 1+2\mu_1,\, \ldots,\, 1+2\mu_n;\, -\frac{a_1}{p},\, \ldots;\, -\frac{a_n}{p}\right) \quad (4)$$

$$=\phi(p),\ R(p)>0,\ R(\sigma+M)>0,\ M=\sum_{i=1}^{n}(\mu_i),$$

तथा [2]

$$g(t)=t^{-\nu-1}\,\psi_2\left(1+\nu;\, 1+\mu,\, 1+\nu;\, -\frac{a^2}{t},\, -\frac{b^2}{t}\right) \quad (5)$$

$$\doteqdot\frac{2\Gamma(1+\mu)}{p^{1/2\mu-1/2\nu-1}\, a^{\mu}b^{\nu}}\, I_\mu(2a\sqrt{p})K_\nu(2b\sqrt{p})$$

$$=\psi(p),\ R(p)>0,\ R[(b\pm a)^2]>0.$$

(2) में संक्रियात्मक युग्म (4) तथा (5) का प्रयोग करने पर

$$\int_0^\infty t^{-\sigma-M-\nu-1}\,\psi_2\left((1+\nu;\, 1+\mu,\, 1+\nu;\, -\frac{a^2}{t},\, -\frac{b^2}{t}\right)$$

$$\times\psi_2\left(\sigma+M;\, 1+2\mu_1,\, \ldots,\, 1+2\mu_n;\, -\frac{a_1}{t},\, \ldots,\, -\frac{a_n}{t}\right)dt$$

$$=\frac{2\Gamma(1+\mu)\prod_{i=1}^{n}[\Gamma(1+2\mu_i)]}{a^{\mu}b^{\nu}\,\Gamma(\sigma+M)\prod_{i=1}^{n}(a_i^{\mu i})}$$

$$\times\int_0^\infty t^{\sigma+1/2\nu-1/2\mu-1}\prod_{i=1}^{n}[J_{2\mu i}(2a_i^{1/2}t^{1/2})]I_\mu(2at^{1/2})K_\nu(2bt^{1/2})\,dt.$$

चरों को बदलने पर यह निम्न रूप ग्रहण करता है :

$$\int_0^\infty t^{\sigma+M+\nu-1}\psi_2(1+\nu;\,1+\mu,\,1+\nu;\,-a^2t,\,-b^2t)$$
$$\times\psi_2(\sigma+M;\,1+2\mu,\,\ldots,1+2\mu n;\,-a_1t,\,\ldots,\,-a_nt)\,dt$$

$$=\frac{4\Gamma(1+\mu)\prod_{i=1}^{n}[\Gamma(1+2\mu_i)]}{a^\mu b^\nu\prod_{i=1}^{n}(a_i^{\mu_i})\Gamma(\sigma+\mathrm{M})}$$

$$\times\int_0^\infty t^{2\sigma+\nu-\mu-1}\prod_{i=1}^{n}[J_{2\mu_i}(2a_i^{1/2}\,t)]I_\mu(2at)K_\nu(2bt)\,dt.$$

दाहिने पक्ष में समाकल का मान कुछ संशोधनों सहित [3, p. 162 (6)] निकालने पर तथा $\sigma+M$ को λ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर (3) प्राप्त होगा ।

4. विशिष्ट दशा

(3) में यदि $a\to 0$ तथा

$$\psi_2(a;\,b,\,c;\,o,\,y)={}_1F_1\,(a;\,c;\,y)$$

का व्यवहार करें और

$${}_1F_1\,(a;\,a;\,x)=e^x,$$

तो हमें

$$\int_0^\infty t^{\lambda+\nu-1}\,e^{-b^2t},\,\psi_2(\lambda;\,1+2\mu_1,\,\ldots,\,1+2\mu_n;\,-a_1t,\,\ldots,\,-a_nt)\,dt \tag{6}$$
$$=\frac{\Gamma(\lambda+\nu)}{b^{2\lambda+2\nu}}\,F_c\left[\lambda,\,\lambda+\nu;\,1+2\mu_1,\,\ldots,\,1+2\mu_n;\,-\frac{a_1}{b^2},\,\ldots,\,-\frac{a_n}{b^2}\right],$$
$$R(\lambda+\nu)>0,\;R[b^2+(\sqrt{a_1}\pm\sqrt{a_2}\pm\ldots\pm\sqrt{a_n})^2]>0.$$

प्राप्त होगा ।

(6) में b^2 के स्थान पर p तथा $\lambda+\nu$ के स्थान पर σ रखें तो हमें नवीन संक्रियात्मक प्रतिबिम्ब प्राप्त होता है :

$$t^{\nu-1}\,\psi_2(\lambda;\,1+2\mu_1,\,\ldots,\,1+2\mu_n;\,-a_1t,\,\ldots,\,-a_nt) \tag{7}$$
$$\doteq\frac{\Gamma(\sigma)}{p^{\sigma-1}}\,F_c\left[\lambda,\,\sigma;\,1+2\mu_1,\,\ldots,\,1+2\mu_n;\,-\frac{a_1}{p},\,\ldots,\,-\frac{a_n}{p}\right],$$
$$R(\sigma)>0,\;R[p+(\sqrt{a_1}\pm\sqrt{a_2}\pm\ldots\pm\sqrt{a_n})^2]>0.$$

विशेषतया जब $n=2$ तो हमें प्रतिबिम्ब [1, p. 223 (13)] प्राप्त होता है ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Tables of Integral transforms **भाग I मैकग्राहिल न्यूयार्क**, 1954
2. मल्लू, एच० बी०, **पी-एच० डी० शोधप्रबन्ध, जोधपुर विश्वविद्यालय,** 1966
3. सक्सेना, आर० के०, Monat. für Mathmatik, 1966, **70**, 161-63

Vijnana Parisad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 1, January, 1976, Pages 39-45

दो चरों वाले H-फलन के लिये प्रसार सूत्र तथा इसका सम्प्रयोग

वाई० एन० प्रसाद तथा आर० के० गुप्ता
गणित विभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेकनालाजी, बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त—अक्टूबर 21, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में दो चरों वाले H-फलन के लिये एक प्रसार सूत्र की स्थापना की गई है और इसका उपयोग दो चरों वाले दो H-फलनों के गुणनफल के अनन्त समाकल को ज्ञात करने के लिये किया गया है ।

Abstract

An expansion formula for H-function of two variables and its application. *By* Y. N. Prasad and R. K .Gupta, Applied and Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi-5.

In this paper we have established an expansion formula for H-function of two variables defined by Mittal and Gupta [8] and have used it in finding the infinite integral of product of two H-functions of two variables. The expansion formula is important because it converts an H-function of two variables into an H-function of one variable. The expansion formula given by Goyal [2] and the integral established recently by Kaul [3] are particular cases of our results.

1. विषय प्रवेश:

मित्तल तथा गुप्ता[8] ने दो चरों वाले H-फलन को सांकेतिक रूप में निम्न प्रकार से परिभाषित किया है :

$$H(x, y)=H\left[\begin{array}{c|l|c} \binom{m_1,\ n_1}{p_1,\ q_1} & \begin{array}{l}\{(a_{p_1};\ \alpha_{p_1},\ A_{p_1})\}\\ \{(b_{q_1};\ \beta_{q_1},\ B_{q_1})\}\end{array} & x \\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2} & \begin{array}{l}\{(c_{p_2},\ \gamma_{p_2})\}\\ \{(d_{q_2},\ \delta_{q_2})\}\end{array} & \\ \binom{m_3,\ n_3}{p_3,\ q_3} & \begin{array}{l}\{(e_{p_3},\ E_{p_3})\}\\ \{(f_{q_3},\ F_{q_3})\}\end{array} & y \end{array}\right] \qquad (1\cdot1)$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{L_1}\int_{L_2} \phi(s, t)\ \theta_1(s)\ \theta_2(t)\ ds\ dt,$$

जहाँ $$\phi(s, t)=\prod_{j=1}^{m1} \Gamma(b_j-\beta_j s-B_j t) \prod_{j=1}^{n1} \Gamma(1-a_j+\alpha_j s+A_j t)[\Pi_1\ \Pi_2]^{-1},$$

$$\theta_1(s)=\prod_{j=1}^{m2} \Gamma(d_j-\delta_j s) \prod_{j=1}^{n2} \Gamma(1-c_j+\gamma_j s)[\Pi_3\ \Pi_4]^{-1},$$

$$\theta_2(t)=\prod_{j=1}^{m3} \Gamma(f_j-F_j t) \prod_{j=1}^{n3} \Gamma(1-e_j+E_j t)[\Pi_5\ \Pi_6]^{-1},$$

जहाँ $$\Pi_1=\prod_{m_1+1}^{q1} \Gamma(1-b_j+\beta_j s+B_j t),\ \Pi_2=\prod_{n_1+1}^{p1} \Gamma(a_j-\alpha_j s-A_j t),$$

$$\Pi_3=\prod_{m_2+1}^{q2} \Gamma(1-d_j+s_j S),\ \Pi_4=\prod_{n_2+1}^{p2} \Gamma(c_j-\gamma_j s),\ \Pi_5=\prod_{m_3+1}^{q3} (1-f_j+F_j t),$$

$$\Pi_6=\prod_{n_3+1}^{p3} \Gamma(e_j-E_j t),$$

तथा प्राचल $m_1, m_2, m_3;\ n_1, n_2, n_3;\ p_1, p_2, p_3;\ q_1, q_2, q_3$ इत्यादि[8] की भाँति परिभाषित हैं ।

2. इस अनुभाग में हम मुख्य परिणामों को स्थापित करेंगे जो निम्न प्रकार हैं:

$$H[bx^\sigma, cx^\mu]=\frac{1}{F_1}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!}\psi(\rho_r)(cx^\mu)^{\rho_r}$$

$$H_{p_1+p_2,\, q_1+q_2}^{m_1+m_2,\, n_1+n_2}\left[bx^\sigma \left| \begin{matrix} \{(a_{n_1}-A_{n_1}\rho_r,\ \alpha_{n_1})\},\ \{(c_{p_2},\ \gamma_{p_2})\}(a_{n_1+1}-A_{n_1+1}\rho_r, \\ \alpha_{n_1+1}),\ \ldots,\ (a_{p1}-\beta_{p1}\rho_r, \alpha_{p_1}) \\ \{(b_{m_1}-B_{m_1}\rho_r,\ \beta_{m_1})\},\ (d_{q_2},\ \delta_{q_2})\},\ (b_{m_1+1}-B_{m_1+1}\rho_r, \\ c_r\beta_{m_1+1}),\ \ldots,\ (b_{q_1}-B_{q_1}\rho_\gamma\beta_{q_1}) \end{matrix}\right.\right], \tag{2·1}$$

जहाँ $\rho_r=\dfrac{f_1+r}{F_1}$ तथा $$\psi(\rho_r)=\prod_{j=2}^{m3} \Gamma(f_j-F_j\rho_r) \prod_{j=1}^{n3} \Gamma(1-e_j+E_j\rho_r)$$

$$\times\left[\prod_{j=m_3+1}^{q3} \Gamma(1-f_j+F_j\rho_\gamma) \prod_{j=n_3+1}^{p3} \Gamma(e_j-E_j\rho_r)\right]^{-1},$$

बशर्ते कि $\delta'<R(f_1/F_1)<\beta'$, $|\arg c|<\frac{1}{2}\nu\pi$, $\nu>0$, जहाँ $\beta'=\min R\left(\dfrac{f_h}{F_h}\right)$ $h=2\ldots m_3$,

$$\delta' = \max R\left(\frac{e_i-1}{E_i}\right) i=1, \ldots, n_3,\ \nu = \sum_{1}^{n1} A_j - \sum_{n_1+1}^{p_1} A_j + \sum_{2}^{m1} B_j - \sum_{m_3+1}^{q_1} B_j$$

$$+ \sum_{1}^{m3} F_j - \sum_{m_3+1}^{q3} F_j + \sum_{1}^{n3} E_j - \sum_{n_3+1}^{p3} E_j,$$

तथा $\phi(\rho_r)$ में गामा-फलनों का अस्तित्व है ।

3. परिणाम की उपपत्ति

दो चरों वाले H-फलन को द्विगुण मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकल के रूप में व्यक्त करने पर

$$H[bx^\sigma, cx^\mu] = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s, t)\theta_1(s)\theta_2(t)\, ds\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \theta_1(s)(bx^\sigma)^s \left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \phi(s, t)\theta_2(t)(cx^\mu)^t\, dt\right\} ds$$

अब $\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \phi(s, t)\theta_2(t)(cx^\mu)^t\, dt$ को एक चर वाले H-फलन के रूप में ग्राहृण करने तथा इसके प्रसार को मुखर्जी तथा प्रसाद[5] द्वारा दिये गये सूत्र द्वारा लिखने पर अर्थात्

$$H_{p,\, q+1}^{m+1,\, n}\left[ax^\sigma \,\middle|\, \begin{matrix}\{(a_p, \alpha_p)\} \\ (b_0, \beta_0), \{(b_q, \beta_q)\}\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{\beta_0} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^\gamma}{\gamma!} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - \beta_j \rho_r)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j+\beta_j\rho_r)} \times \frac{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+\alpha_j\rho_r)}{\prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - \alpha_j \rho_r)} \cdot a^{\rho_r} x^{\sigma\rho_r}$$

जहाँ $\rho_r(b_0+\gamma)/\beta_0$, यदि $\beta_0 > 0,\ \beta < R(b_0/\beta_0) < \delta,\ |\arg a| < \frac{1}{2}\lambda\pi,\ \lambda > 0.$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \theta_1(s)(bx^\sigma)^s \frac{1}{F_1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{\prod_{j=1}^{m1} \Gamma(b_j - \beta_j s - B_j\rho_r)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1} \Gamma(1-b_j+B_j s B_j \rho_r)}$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{n1} \Gamma(1-a_j+\alpha_j s+A_j\rho_r) \prod_{j=2}^{m3} \Gamma(f_j - F_j\rho_r) \prod_{j=1}^{n3} \Gamma(1-e_j+E_j\rho_r)}{\prod_{j=n_1+1}^{p1} \Gamma(a_j-\alpha_j s-A_j\rho_r) \prod_{j=m_3+1}^{q3} \Gamma(1-f_j+F_j\rho_r) \prod_{j=n_3+1}^{p3} \Gamma(e_j - E_j\rho_r)}$$

$$=\frac{1}{F_1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\psi(\rho_r)(cx^{\mu})^{\rho_r}\ \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\theta_1(s)\frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(b_j-\beta_j s-B_j\rho_r)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+\beta_j s+B_j\rho_r)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s+A_j\rho_r)}{\sum_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-\alpha_j s-A_j\rho_r)}(bx^{\sigma})^s\,ds.$$

$$=\frac{1}{F_1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\psi(\rho_r)(cx^{\mu})^{\rho_r}\ H^{m_1+m_2,\,n_1+n_2}_{p_1+p_2,\,q_1+q_2}\left[bx^{\sigma}\left|\begin{matrix}\{(a_{n_1}-A_{n_1}\rho_r,\ \alpha_{n_1})\},\\ \{(b_{m_1}-B_{m_1}\rho_r,\ \beta_{m_1})\},\end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{(c_{p_2},\ \gamma_{p_2})\},\ (a_{n_1+1}-A_{n_1+1}\rho_r,\ \alpha_{n_1+1})\ldots(a_{p_1}-A_{p_1}\rho_r,\ \alpha_{p_1})\\ \{(d_{p_2},\ \delta_{q_2})\},\ (b_{m_1+1}-B_{m_1+1}\rho_r,\ \beta_{m1}+1)\ldots(b_{q_1}-B_{q_1}\rho_r,\ \beta_{q1})\end{matrix}\right],$$

बशर्ते कि (2·1) में कथित प्रतिबन्ध तुष्ट हों ।

4. **विशिष्ट दशायें :**

(i) $m_1=n_1=0$ मानने पर

$$H[bx^{\sigma},\ cx^{\mu}]=\frac{1}{F_1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\ \psi(\rho_r)(cx^{\mu})^{\rho}{}_r$$

$$H^{m_2,\,n_2}_{p_2+p_1,\,q_2+q_1}\left[bx^{\sigma}\left|\begin{matrix}\{(c_{p_2},\ \gamma_{p_2})\},\ \{(a_{p_1}-A_{p_1}\rho_r,\ \alpha_{p_1})\}\\ \{(d_{q_2},\ \delta_{q_2})\},\ \{(b_{q_1}-B_{q_1}\rho_r,\ \beta_{q_1})\}\end{matrix}\right.\right], \qquad (4\cdot1)$$

बशर्ते कि (2·1) के उपयुक्त प्रतिबन्ध तुष्ट हों ।

(ii) $f_1=0$, $F_1=1$ रखने पर तथा (4·1) के प्रसरित रूप में $c\to0$ लेने पर

$$\lim_{c\to0}\ H_1[bx^{\sigma},\ cx^{\mu}]=\frac{1}{F_1}\frac{\prod_{=2}^{m3}\Gamma(f_j)\prod_{j=1}^{n3}\Gamma(1-e_j)}{\prod_{j=m_3+1}^{q_3}\Gamma(1-f_j)\prod_{j=n_3+1}^{p3}\Gamma(e_j)}$$

$$\times H^{m_2,\,n_2}_{p_2+p_1,\,q_2+q_1}\left[ax^{\sigma}\left|\begin{matrix}\{(c_{p_2},\ \gamma_{p_2})\},\ \{(a_{p_1},\ \alpha_{p_1})\}\\ \{(d_{q_2},\ \delta_{q_2})\},\ \{(b_{q_1},\ \beta_{q_1})\}\end{matrix}\right.\right] \qquad (4\cdot2)$$

(iii) $f_1=0, F_1=F_2=\ldots=F_{q_3}=1=E_1=E_2=\ldots=E_{p_3}=\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_{p_2}=\delta_1=\delta_2=\ldots=\delta_{q_2}=A_1=A_2=\ldots=A_{p_1}=B_1=B_2=\ldots=B_{p_1}=\alpha_1=\alpha_2=\ldots\alpha_{p_1}\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_{q_1}$ रखने पर तथा (4·1) के प्रसरित रूप में $c\to 0$ लेने पर हमें गोयल का परिणाम [2, (1·5)] प्राप्त होता है अर्थात्

$$\lim_{c\to 0} G\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}0, 0\\ p_1, q_1\end{pmatrix} & \begin{matrix}(a_{p_1})\\ (b_{q_1})\end{matrix} & bx^{\sigma}\\ \begin{pmatrix}m_2, n_2\\ p_2, q_2\end{pmatrix} & \begin{matrix}(c_{p_2})\\ (e_{p_2})\end{matrix} & cx^{\mu}\\ \begin{pmatrix}m_3, n_3\\ p_3, q_3\end{pmatrix} & \begin{matrix}(e_{p_3})\\ (E_{q_3})\end{matrix} & \end{bmatrix}=\frac{\prod\limits_{j=2}^{m_3}\Gamma(f_j)\prod\limits_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j)}{\prod\limits_{j=m_3+1}^{q_3}\Gamma(1-f_j)\prod\limits_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j)}$$

$$\times G^{m_2, n_2}_{p_2+p_1, q_2+q_1}\left[bx^{\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_{p_1})(e_{p_2})\\ (b_{q_1})(d_{q_1})\end{matrix}\right], \qquad (4\cdot3)$$

बशर्ते कि $f_j, j=2, \ldots, m_3; e_j, j=1, \ldots, n_3$ पूर्णांक न हों तथा (4·3) का बाम पक्ष दो चरों वाला G-फलन हो।

5. **सम्प्रयोग :**

माना कि $H_1^*[b'x^{\sigma'}, c'x^{\mu'}]$ को हम दो चरों वाले H-फलन के रूप में परिभाषित करते हैं जहाँ (1.1) में प्रत्येक प्राचल अपने डैशों के द्वारा प्रतिस्थापित हो जाता है तथा $m_1=n_1=0$। तब सूत्र (5·3) का उपयोग करके अनन्त समाकल प्राप्त करते हैं जिसमें दो चरों वाले दो H-फलनों का गुणनफल सन्निहित रहता है अर्थात्

$$\int_0^{\infty} x^{\rho-1}H_1[bx^{\sigma}, cx^{\mu}]\, H_1^*[b'x^{\sigma'}, c'x^{\mu'}]\, dx \qquad (5\cdot1)$$

$$=\frac{1}{F_1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}c^{\rho_r}\psi(\rho_r)\int_0^{\infty}x^{\rho+\mu\rho_r-1}$$

$$\times H^{m_2, n_2}_{p_2+p_1, q_2+q_1}\left[bx^{\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}\{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\}, \{(a_{p_1}-A_{p_1}\rho_r, \alpha_{p_1})\}\\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\}\{(b_{q_1}, B_{q_1}\rho_r, \beta_{q_1})\}\end{matrix}\right] H_1^*[b'x^{\sigma'}, c'x^{\mu'}]\, dx,$$

बशर्ते कि (2·1) में दिये गये प्रतिबन्ध तुष्ट हों। अब राम[6] के ज्ञात समाकल का सदुपयोग करने पर अर्थात्

$$\int_0^{\infty}x^{\rho-1}\, H^{m, n}_{p, q}\left[ax^{\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}\{(a'_{p_1}, \alpha'_p)\}\\ \{(b', \beta_q')\}\end{matrix}\right] H_1[bx^h, cx^k]\, dx \qquad (5\cdot2)$$

$$=\frac{1}{\sigma}a^{-\rho/\sigma}H\left[\begin{matrix}\binom{n,\ m}{p_1+q,\ q_1+p}\\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2}\\ \binom{m_3,\ n_3}{p_3,\ q_3}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\{(1-b'_q-\frac{\rho}{\sigma}\beta'_q,\frac{h}{\sigma}\beta'_q,\frac{k}{\sigma}\beta'_q)\},\{(a_{p_1};\alpha_{p_1},A_{p_1})\}\\ \{(1-a'_p-\frac{\rho}{\sigma}\alpha'_p,\frac{h}{\alpha}\alpha'_p,\frac{k}{\sigma}\alpha'_p)\},\{(b_{q_1};\beta_{q_1},B_{q_1})\}\\ \{(c_{p_2},\gamma_{p_2})\}\\ \{(d_{q_2},\delta_{q_2})\}\\ \{(e_{p_3},E_{p_3})\}\\ \{(f_{q_3},F_{q_3})\}\end{matrix}\right|\begin{matrix}\frac{b}{a^{h/\sigma}}\\ \frac{c}{a^{k/\sigma}}\end{matrix}\right],$$

बशर्ते कि $\sigma, h, k>0$, $|\arg a|<\frac{1}{2}\lambda\pi$, $\lambda>0$, $A>0$, $R(\rho+\sigma\delta+h\alpha'+k\beta')>0$, $R(\rho+\sigma\beta+h\gamma'+k\delta')<0$ जहाँ $\delta', \beta', \gamma', \delta'\ \beta', \gamma'$, को निम्नांकित समीकरणों द्वारा दिया जाता है

$$\alpha'=\min R(d_h/\delta_h),\ h=1,\ \ldots,\ m_2;\ \gamma'+\max R\left(\frac{c_1-1}{\gamma_i}\right),\ i=1,\ \ldots,\ n_2, \tag{5·3}$$

β' तथा δ' को समीकरण (2·2) द्वारा प्रदर्शित करते हैं, तो (5·1) का दायाँ पक्ष (5·4) में समानीत हो जाता है :

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}H_1[bx^\sigma,cx^\mu]\,H_1^*[b'x^{\sigma'},c'x^\mu[\,dx \tag{5·4}$$

$$=\frac{1}{F_1}\sum_{r=0}^\infty\frac{(-1)^r}{r!}c^{\rho_\gamma}\psi(\rho_r)b^{-\rho-\mu\rho_r/\sigma}$$

$$H\left[\begin{matrix}\binom{n_2,\ m_2}{p_1'+q_1+q_2,\ q_1'+p_1+p_2}\\ \binom{m_2',\ n'_2}{p'_2,\ q'_2}\\ \binom{m_3,\ n_3}{p_3,\ q_3}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\{(a'_{p'_1};\alpha'_{p'_1},A'_{p'_1})\},\\ \{(b'_{q'_1};\beta'_{q'_1},B'_{q'_1})\},\\ \{(c'_{p'_2},\gamma'_{p'_2})\}\\ \{(d'_{q'_2},\delta'_{q'_2})\}\\ \{(e'_{q'_3},E'_{p'_3})\}\\ \{(f'_{q'_3},F'_{q'q_3})\}\end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\left.\begin{matrix}\{(1-d_{q_2}-\frac{\rho+\mu_r}{\sigma}\delta_{q_2},\frac{\sigma'}{\sigma}\delta_{q_2},\frac{\mu'}{\sigma}\delta_{q_2})\},\{(1-b_{q_1}+B_{q_1}\rho_r-\frac{\rho+\mu\rho_r}{\sigma}\beta'_{q_1},\frac{\sigma'}{\sigma}\beta_{q_1},\frac{\mu'}{\sigma}\beta_{q_1})\}\\ \{(1-c_{p_2}-\frac{\rho+\mu\rho_r}{\sigma}\gamma_{p_2},\frac{\sigma'}{\sigma}\gamma_{p_2},\frac{\mu'}{\sigma}\gamma_{p_2})\},\{(1-a_{p_1}+A_{p_1}\rho_r-\frac{\rho+\mu\rho_r}{\sigma}\alpha'_{p_1},\frac{\sigma'}{\sigma}\alpha_{p_1},\frac{\mu'}{\sigma}\alpha_{p_1})\}\end{matrix}\right|\begin{matrix}\frac{b'}{b^{\sigma'/\sigma}}\\ \frac{c'}{b^{\mu'/\sigma}}\end{matrix}\right],$$

जहाँ

$$\rho_\gamma = \frac{f_1 + r}{F_1} \quad \text{तथा} \quad \psi(\rho_r) \frac{\prod_{j=2}^{m_3} \Gamma(f_j - F_j\rho_r) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1 - e_j + E_j\rho_r)}{\prod_{j=m_3+1}^{q_3} \Gamma(1 - f_j + F_j\rho_r) \prod_{j=n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j - E_j\rho_r)},$$

बशर्ते कि $\sigma, \sigma', \mu, \mu' > 0$, $|\arg b| < \frac{1}{2}\lambda\pi$, $\lambda > 0$, $A > 0$,

$$R(\rho + \sigma\alpha' + \mu\beta' + \sigma'\alpha'' + \mu'\beta'') > 0; \; R(\rho + \sigma\gamma' + \mu\delta' + \sigma'\gamma'' + \mu'\delta'') < 0,$$

जहाँ α', γ' को समीकरण (5·3) द्वारा, β' और δ' को (2.2) द्वारा तथा α'', β'' γ'', δ'' को उपर्युक्त समीकरणों में प्राचलों में दोनों ओर एक और डैश रख कर प्राप्त किया जाता है।

$$|\arg b| < \tfrac{1}{2}u\pi, \; u = -\sum_{1}^{p_1} \alpha_j - \sum_{1}^{q_1} \beta_j + \sum_{1}^{m_2} \delta_j - \sum_{m_2+1}^{q_2} \delta_j + \sum_{1}^{n_2} \gamma_j - \sum_{n_3+1}^{p_3} \gamma_j, \tag{5·5}$$

$$|\arg c| < \tfrac{1}{2}v\pi, \; v = -\sum_{1}^{p_1} A_j - \sum_{1}^{q_1} B_j + \sum_{1}^{m_3} F_j - \sum_{m_3+1}^{q_3} F_j + \sum_{1}^{n_3} E_j - \sum_{n_3+1}^{p_3} E_j, \tag{5·6}$$

$|\arg b'| < \frac{1}{2}u'\pi$, $|\arg c'| < \frac{1}{2}v'\pi$, जहाँ u', v' को (5·5) तथा (5·6) के प्राचलों में डैश रखने से प्राप्त होता है।

निर्देश

1. फाक्स, सी०, ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०, 1961, **98** 395-429
2. गोयल, एस० पी०, प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया, 1970, **40A**, 219-28
3. कौल, सी० एल०, प्रोसी० इंडियन एके० साइंस, 1974, **79**, 56-66
4. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, वही, 1972, **75**, 117-23
5. मुखर्जी, एस० एन० तथा प्रसाद, वाई० एन०, मैथ०एजुकेशन, 1972, **5A**, 5-12
6. राॅ, एस० डी०, इंडि० जर्न० प्योर० ऐप्लाइड मैथ० (प्रकाशनाधीन)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 1, January, 1976, Pages 47-49

ट्रैप पूरित सीमित डायोड में तप्त वाहकों का प्रभाव

वाई० के० शर्मा
भौतिकी विभाग, आर० बी० एस० कालेज, आगरा

[प्राप्त—नवम्बर 21, 1975]

सारांश

ट्रैप पूरित सीमित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत तप्त वाहकों के प्रभाव-क्षेत्र में कार्यशील इन्सुलेटर के लिये धारा घनत्व तथा वोल्टता के लिये यथार्थ वैश्लेषिक हल प्रस्तुत किया गया है।

Abstract

Effect of hot carriers in the trap filled limited diode. *By* Y. K. Sharma, Department of Physics, R. B. S. College, Agra.

An exact analytic solution for the current density and voltage of the insulator operating in hot carriers regime have been given under the trap filled limited conditions.

वैज्ञानिक तथा प्रौद्योगिक विकास में ठोस अवस्था के डायोडों[1-4] में धारा-निवेशन एक महत्वपूर्ण घटना है। हाल ही में लेखक ने शोर ताप[4] तथा अंशांकन नियम[3] के लिये तप्त वाहक प्रभाव पर विचार किया है। यहाँ पर विमाहीन चरों u_t, v_t तथा w_t के रूप में धारा घनत्व तथ वोल्टता के मान परिगणित किये गये हैं।

ऐसी परिस्थिति पर विचार करें जिसमें ट्रैपों का एक ही समुच्चय N_t ऊर्जास्तर E_t पर अवस्थित है और सभी ट्रैप वोल्टता प्रयुक्त करने के पूर्व भरे हुये हैं। धारा प्राह तथा प्वायसाँ नियम सम्बन्धी समीकरण निम्नवत हैं[1, 3]

$$J = e\,\mu(E)\,n(x)\,E(x) \tag{1}$$

तथा
$$\frac{\epsilon}{e}\frac{dE}{dx}=n+N_t. \tag{2}$$

जहाँ $\mu(E)$ उच्च क्षेत्र गतिशीलता है और [2] से पता चलता है कि

$$\mu(E)=\mu_O\sqrt{\frac{E_C}{E(x)}} \tag{3}$$

जहाँ μ_O निम्न क्षेत्र गतिशीलता है, E_C क्रान्तिक वैद्युत क्षेत्र है जो [2] से परिभाषित है और $E(x)$ x दूरी पर वैद्युत क्षेत्र है।

विमाहीन चरों को निम्न प्रकार से चुना जा सकता है,

$$u_t=\frac{N_t}{n(x)}=\frac{eN_t\mu_O\sqrt{E(x)}\sqrt{E_C}}{J},\ w_t=\frac{e^2N_t^2\,\mu_O\sqrt{E_C}x}{\epsilon J\ /E(x)} \tag{4}$$

तथा
$$v_t=\frac{e^3N_t^3\mu_O^2\,E_C V(x)}{\epsilon J^2E(x)}$$

विमाहीन चरों के रूप में, अवकल समीकरण को समीकरण (2) तथा (4) से प्राप्त किया जा सकता है

$$u_t\,dw_t+w_t\,du_t=\frac{2u_t^2\,du_t}{(1+u_t)} \tag{5}$$

जिसका हल

$$w_t=2\left[\frac{u_t}{2}-1+\frac{l_n(1+u_t)}{u_t}\right] \tag{6}$$

समीकरण (1-5) से विमाहीन चरों V_t को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है

$$v_t=\frac{1}{u_t^2}\int u_t^2\,[u_t\,dw_t+w_t\,du_t]$$
$$=2\left[\frac{u_t^2}{4}-\frac{u_t}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{u_t}+\frac{\log\,(1+u_t)}{u_t^2}\right] \tag{7}$$

धारा घनत्व J तथा वोल्टता V के मान समीकरण (1) तथा (4) से प्राप्त किये जाते हैं

$$J^2=\frac{e^3N_t^3\mu_O^2E_CL}{|\epsilon}\times\frac{1}{u_{ta}w_{ta}},\ V=\frac{eN_tL^2}{\epsilon}\frac{v_{ta}}{w^2_{ta}} \tag{8}$$

जहाँ पादाक्षर a $x=L$ के संगत है। u_{ta} के किसी दिये हुये मान के लिये हम क्रमशः समीकरण (6) तथा (7) से w_t तथा V_t के मान निकालते हैं जिन्हें समीकरण (8) में प्रतिस्थापित करने से धारा घनत्व तथा वोल्टता प्राप्त होता है। प्वायसाँ समीकरण (2) में N_t की उपस्थिति के फलस्वरूप धारा-वोल्टता लक्षणों के ज्ञात करने की कोई अन्य यथार्थ विधि नहीं है।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 19, No 1, January, 1976, Pages 51-56

अष्टि के रूप में परावलयी सिलिंडर फलन वाले संवलयी परिवर्त

एच० एल० गुप्त
राजकीय इंजीनियरी कालेज, उज्जैन

[प्राप्त—अक्टूबर 12, 1974]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में अष्टि के रूप में परावलयी सिलिंडर फलन वाले दो संवलयी परिवर्तों का प्रतिलोमन प्राप्त किया गया है। इस प्रकार से प्राप्त फलों को अन्य समाकलों के मान ज्ञात करने में व्यवहृत किया गया है। इसके लिये विडर की विधि प्रयुक्त की गई है।

Abstract

On convolution transforms involving parabolic cylinder function as the kernel. *By* H. L. Gupta, Government Engineering College, Ujjain.

In the present paper we obtain inversion of two convolution transforms involving parabolic cylinder function as the kernel. The results obtained are further applied in evaluating certain integrals. The method adopted is the same as that of Widder.

1. विषय प्रवेश

विडर [1] ने लैप्लास परिवर्तों के सम्प्रयोग से लागेर बहुपदी वाले परिवर्त का प्रतिलोमन प्राप्त किया। इसी विधि के द्वारा भारतीय [2, 3, 4], खांडेकर [5], रुसिया [6], भोंसले [7] तथा सिंह [8] ने कुछ संवलयी परिवर्तों के प्रतिलोमन प्राप्त किये जिनकी अष्टियां अन्य बहुपद या फलन हैं। प्रस्तुत शोध पत्र में अष्टि के रूप में परावलयी सिलिंडर फलन वाले दो संवलयी परिवर्तों का प्रतिलोमन प्राप्त किया गया है।

2. उपपत्ति के लिये आवश्यक फल

हम लैप्लास परिवर्त

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt,\ Re\, p>0, \text{ को}$$

$$F(p)=L\{f(t)\} \text{ या } F(P) \doteqdot f(t). \tag{2·1}$$

द्वारा व्यक्त करेंगे ।

[9, p. 129, p. 131, p. 144, p. 210, p. 217, p. 238] से

$$p^n F(p) \doteqdot f^{(n)}(t), \text{ बशर्ते कि } f(0)=f'(0)=\cdots =f^{(n-1)}(0)=0. \tag{2·2}$$

$$F(p+a) \doteqdot e^{-at} f(t). \tag{2·3}$$

$$F_1(p) \,.\, F_2(p)=\int_0^t f_1(u) \,.\, f_2(t-u)\, du, \tag{2·4}$$

जहाँ $F_1(p) \doteqdot f_1(t)$ तथा $F_2(p) \doteqdot f_2(t)$

$$\Gamma(n)(p+a)^{-n} \doteqdot t^{n-1} \,.\, e^{-at},\ Re p > -Re\ a. \tag{2·5}$$

$$(-2)^n \Gamma(n+\tfrac{1}{2})(p-\tfrac{1}{2})^n(p+\tfrac{1}{2})^{-n-1/2} \doteqdot t^{-1/2} D_{2n}(2^{1/2}t^{1/2}),\ Re\, p > -\tfrac{1}{2}. \tag{2·6}$$

$$(-2)^n \Gamma(n+3/2)(p-\tfrac{1}{2})^n(p+\tfrac{1}{2})^{-n-3/2} \doteqdot D_{2n+1}(2^{1/2}t^{1/2}),\ Re p > -\tfrac{1}{2}. \tag{2·7}$$

$$\Gamma(\gamma) p^{\alpha-\gamma}(p-\lambda)^{-\alpha} \doteqdot t^{\gamma-1} \,.\, {}_1F_1\ (\alpha;\ \gamma;\ \lambda t),\ Re\ \gamma > 0,\ Re\ p > 0,\ Re\ \lambda > 0. \tag{2·8}$$

$$p^{-2\lambda}(p^2+a^2)^{-\nu} \doteqdot \frac{1}{\Gamma(2\lambda+2\nu)}\, t^{2\lambda+2\nu-1}\ {}_1F_2\ (\nu;\ \lambda+\nu,\ \lambda+\nu+\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{4}a^2t^2),\ Re\ (\lambda+v) > 0 \tag{2·9}$$

(2·3) से (2·9) तक के सम्बन्धों का प्रयोग करने पर

$$(-2)^n \,.\, \Gamma(n+\tfrac{1}{2})(p-1)^n \,.\, p^{-n-1/2} \doteqdot e^{1/2t} \,.\, t^{-1/2} \,.\, D_{2n}(2^{1/2}t^{1/2}). \tag{2·10}$$

$$(-2)^n \Gamma(n+3/2)(p-1)^n p^{-n-3/2} \doteqdot e^{1/2t} D_{2n+1}(2^{1/2}t^{1/2}). \tag{2·11}$$

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) p^{-1/2}(p-1)^{-n} \doteqdot t^{n-1/2} \,.\, {}_1F_1\ (n;\ n+\tfrac{1}{2};\ \ t). \tag{2·12}$$

$$p^{n+1/2}(p^2-1)^{-n} \doteqdot \frac{1}{\Gamma(n-\frac{1}{2})}\ t^{n-3/2}\ {}_1F_2\ (n;\ n/2-\tfrac{1}{4},\ n/2+\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{4}t^2),\ Re\ n > \tfrac{1}{2}. \tag{2·13}$$

हमें एक प्रसिद्ध फल

$$(D+1)^n f(x)=e^{-x} D^n\{e^x f(x)\}, \tag{2·14}$$

प्राप्त है जहाँ $D \equiv d/dx$.

3. **प्रमेय I :**

माना कि

(i) n धन पूर्णांक है।

(ii) $f^{(n+1)}(x)$ खण्डशः संतत है यदि $0 \leqslant x < x_1 < \infty$, तथा $f^{(k)}(0)=0$ यदि $0 \leqslant k \leqslant n$.

तो परिवर्त

$$f(x)=\int_0^t e^{1/2(x-t)} \cdot (x-t)^{-1/2} D_{2n}\{2^{1/2}(x-t)^{1/2}\}g(t)\, dt. \tag{3·1}$$

का प्रतिलोमन

$$g(t)=\frac{(-2)^{-n}}{\{\Gamma(n+\frac{1}{2})\}^2}\int_0^t (t-y)^{n-1/2} \cdot {}_1F_1\, [n; n+\tfrac{1}{2}; (t-y)] \cdot [(d/dy)^{n+1}f(y)]\, dy, \tag{3·2}$$

उपपत्ति

माना कि $G(p) \doteqdot g(t)$, संवलयी प्रमेय (2·4) से (3·1) तथा (2·10) के सम्प्रयोग से

$$F(p)=(-2)^n \Gamma(n+\tfrac{1}{2})(p-1)^n, p^{-n-1/2} \cdot G(p). \tag{3·3}$$

पदों में थोड़ा सा समंजन करने पर

$$G(p)=\frac{(-2)^{-n}}{\{\Gamma(n+\frac{1}{2})\}^2}\, [\Gamma(n+\tfrac{1}{2})p^{-1/2}(p-1)^{-n}]\, [p^{n+1}\, F(p)]. \tag{3·4}$$

(3·4) का व्युत्क्रम प्राप्त करने पर तथा (2·2), (2·4) और (2·12) का सम्प्रयोग करने पर हमें परिवर्त (3·1) का प्रतिलोमन (3·2) के रूप में प्राप्त होता है।

प्रमेय II :

माना कि

(I) n एक धन पूर्णांक है।

(ii) $f^{(n+2)}(x)$ खण्डशः संतत है यदि $0 \leqslant x \leqslant x_1 < \infty$, तथा $f^{(m)}(0)=0$ यदि $0 \leqslant m \leqslant n+1$, तो परिवर्त

$$f(x)=\int_0^x e^{1/2(x-t)} D_{2n+1}\{2^{1/2}(x-t)^{1/2}\}\, g(t)\, dt. \tag{3·5}$$

का प्रतिलोमन

$$g(t)=\frac{(-2)^{-n}}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(n+\frac{1}{2})}\int_0^t (t-y)^{n-1/2}\,.\,{}_1F_1\,[n;\,n+\tfrac{1}{2};\,(t-y)]\,.\,[(d/dy)^{n+2}f(y)]\,dy. \quad (3{\cdot}6)$$

इस प्रमेय को भी (2·11) के सम्प्रयोग से उपर्युक्त विधि से सिद्ध किया जा सकता है ।

प्रमेय III:

माना कि

(i) n एक घन पूर्णांक है ।

(ii) $(d/dx)^n\{e^x f(x)\}$ खण्डशः संतत है यदि

$$0\leqslant x<x_1<\infty, \text{ तथा } f(0)=f'(0)=\ldots =f^{(n-1)}(0)=0,$$

तो परिवर्त (3·1) का प्रतिलोमन होगा :

$$g(t)=\frac{(-2)^{-n}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})}\int_0^t (t-y)^{n-3/2}\,.\,{}_1F_2\,[n;\,n/2-\tfrac{1}{4},\,n/2+\tfrac{1}{4};\,\tfrac{1}{4}(t-y)^2]\,.\,e^{-y}\,.\,[(d/dy)^n e^y f(y)]\,dy. \quad (3{\cdot}7)$$

ध्यान देने की बात यह है कि यह फल प्रमेय I की तुलना में भिन्न किन्तु कम कठोर प्रतिबन्धों के अन्तर्गत अपेक्षित है ।

उपपत्ति

सम्बन्ध (3·3) को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है :

$$G(p)=\frac{(-2)^{-n}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\,[p^{n+1/2}(p^2-1)^{-n}][(p+1)^n f(p)]. \quad (3{\cdot}8)$$

(3·8) का प्रतिलोमन करने तथा सम्बन्ध (2·2), (2·4), (2·13) और (2·14) का उपयोग करने पर विभिन्न प्रतिबिम्ब-समुच्चयों के अन्तर्गत हमें परिवर्त (3·1) का प्रतिलोमन (3·7) के रूप में प्राप्त होता है ।

4. समाकल:

इस अनुभाग में हम उपर्युक्त तीन प्रमेयों का उपयोग निम्नांकित समाकलों के मान ज्ञात करने के लिये करेंगे :

$$\int_0^t (t-y)^{n-1/2} \, . \, {}_1F_1 \, [n; n+\tfrac{1}{2}; (t-y)] \, . \, [(d/dy)^{n+1} \, . \, e^{1/2y} D_{2n+1}(2^{1/2}y^{1/2}))] \, dy. \quad (4\cdot1)$$

$$=(-2)^n \Gamma(n+3/2) \, . \, \Gamma(n+\tfrac{1}{2}).$$

$$\int_0^t (t-y)^{n-1/2} \, {}_1F_1 \, [n; n+\tfrac{1}{2}; (t-y)][(d/dy)^{n+2} y^{n+1/2}] \, dy. \quad (4\cdot2)$$

$$=\frac{\Gamma(n+3/2)\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n)} e^t t^{n-1}.$$

$$\int_0^t (t-y)^{n-3/2} \, . \, {}_1F_2 \, [n: n/2-\tfrac{1}{4}, n/2+\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}(t-y)^2] \, . \, e^{-y}$$

$$. \, [(d/dy)^n \, . \, e^{3/2y} D_{2n+1}(2^{1/2}y^{1/2}] \, dy. \quad (4\cdot3)$$

$$=(-2)^n \Gamma(n-\tfrac{1}{2})\Gamma(n+3/2), \text{ जहाँ } n=1, 2, 3, \ldots$$

उपपत्ति

हमें ज्ञात है कि तत्समक

$$\left[(-2)^n \Gamma(n+\tfrac{1}{2}) \frac{(p-1)^n}{p^{n+1/2}}\right] . \, 1/p \, . =1/(n+1/2)[(-2)^n \Gamma(n+3/2). \, (p-1)^n/p^{n+3/2}]. \quad (4\cdot4)$$

(4·4) में (2·5), (2·6) तथा (2·7) को व्यवहृत करने पर

$$L\{e^{1/2t} \, t^{-1/2} D_{2n}(2^{1/2} \, t^{1/2})\} \, . \, L\{1\}=1/(n+\tfrac{1}{2}) \, . \, L\{e^{1/2t} D_{2n+1}(2^{1/2}t^{1/2})\}. \quad (4\cdot5)$$

(4·5) में संवलयी प्रमेय (2·4) व्यवहृत करने पर

$$\int_0^x e^{1/2(x-t)} \, . \, (x-t)^{-1/2} D_{2n}\{2^{1/2}(x-t)^{1/2}\} \, dt=1/(n+\tfrac{1}{2}) \, . \, e^{1/2x} D_{2n+1}(2^{1/2} \, x^{1/2}). \quad (4\cdot6)$$

फल (4·6) की तुलना (3·1) से करने पर

$$g(t)=1 \text{ तथा } f(x)=1/n+\tfrac{1}{2} \, . \, e^{1/2x} D_{2n+1} \, (2^{1/2}x^{1/2}).$$

(3·2) तथा (3·7) में $f(x)$ तथा $g(t)$ के मान प्रतिस्थापित करने तथा सरल करने पर समाकल (4·1) तथा (4·3) प्राप्त होते हैं।

इसी प्रकार से निम्नांकित तत्समक के व्यवहार से समाकल (4·2) प्राप्त किया जा सकता है।

$$\left[(-2)^n \Gamma(n+3/2) \frac{(p-1)^n}{p^{n+3/2}}\right] [\Gamma(n)/(p-1)^n] \quad (4\cdot7)$$

$$=(-2)^n \Gamma(n) \left[\frac{\Gamma(n+3/2)}{p^{n+3/2}}\right]$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक गणित के प्रोफेसर डा० के० सी० रुसिया का अत्यन्त आभारी है जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. विडर, डी० वी०, **अमे० मैथ० मंथली,** 1963, 70(3), 297-93
2. भारतीय, पी० एल०, **वही,** 1965, **72**(4)
3. वही, **जर्न० इंडि० मैथ० सोसा० (न्यूसिरीज),** 1964, **28** (3, 4)
4. वही, **अमे० मैथ० मंथली,** 1967, **74**(1), 38
5. खांडेकर, पी० आर०, J. DeMathematiques, Pures et Appliquees Paris, 1965, **44,** 195-197
6. रुसिया, के० सी०, **मैथेमेटिका जैपोनिका,** 1966, **2**
7. भोंसले, बी० सी०, **गणित,** 1966, **17** (2)
8. सिंह, सी०, **मैथमेटिका जैपोनिका,** 1968, **13,** 71-77
9. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, **भाग I**, 1954, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 1, January 1976, Pages 57-70

A^* फलन के प्रसार प्रमेय

एम० के गोस्वामी तथा ए० एन० गोयल
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—जनवरी 19,1974]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र एक पूर्ववर्ती प्रपत्र के क्रम में है। इसमें A* फलन के ग्यारह और प्रसार प्रमेय दिये गये हैं। शर्मा $S(x,y)$ तथा अग्रवाल $G(x,y)$ फलनों में प्राप्य प्रसार प्रमेयों को विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किया गया है।

Abstract

Expansion theorems of A* function. *By* M. K. Goswami and A. N. Goyal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

The present paper is in continuation of an earlier paper by Goswami, Chaturvedi and Goyal (1971). Eleven more expansion theorems of A* function are given here. The expansion theorems in Sharma $S(x, y)$ (1965 *a*) and Agarwal $G(x, y)$ (1965 *b*) functions can be obtained as particular cases of the present investigation.

$A^*(x, y)$ फलन को चतुर्वेदी तथा गोयल (1972) ने निम्न प्रकार से परिभाषित किया है

$$A^{*\,m_1,\,0\,;\,m_2,n_2\,;\,m_3,\,n_3}_{\;p_1,\,q_1\,;\,p_2,q_2\,;\,p_3,\,q_3}\left[\begin{array}{c|c} x & [((a_{p_1},\alpha_{p_1}))\,;\,((b_{q_1},\beta_{q_1}))] \\ & \{((c_{p_2},\gamma_{p_2}))\,;\,((d_{q_2}\ \delta_{q_2}))\} \\ y & \{((e_{p_3},\lambda_{p_3}))\,;\,((f_{q_3},\mu_{q_3}))\} \end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(a_j+\alpha_j s+\alpha_j t)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(1-c_j+\gamma_j s)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(d_j-\delta_j s)\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(1-e_j+\lambda_j t)}{\prod_{j=m_1+1}^{p_1}\Gamma(1-a_j-\alpha_j s-\alpha_j t)\prod_{j=1}^{q_1}\Gamma(b_j+\beta_j s+\beta_j t\prod_{j=m_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-\gamma_j s)\prod_{j=n_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+\delta_j s)}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(f_j-\mu_j t)\, x^s y^t\, ds dt}{\prod_{j=m_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j-\lambda_j t) \prod_{j=n_3+1}^{q_3} \Gamma(1-f_j+\mu_j t)}$$

जहां समस्त α', β' γ', δ', λ', μ' धनात्मक हैं। L_1, L_2 तथा s और t तलों पर उपयुक्त कंटूर हैं जो अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक फैले हैं और आवश्यकता पड़ने पर आश्वस्त कराते हैं कि

$$\Gamma(d_j-\delta_j s);$$

$j=1, 2, ..., n_2$ के पोल L_1 के दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1-c_j+\gamma_j s)$, $j=1, 2, ... m_2$, $\Gamma(a_j+\alpha_j s+a_j t)$, $j=1, 2, ..., m_1$ के पोल बाईं ओर पड़ें। $\Gamma(f_j-\mu_j t)$, $j=1, 2, ..., n_3$, के पोल L_2 के दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1-e_j+\lambda_j t)$, $j=1, 2, ..., m_3$, के पोल और $\Gamma(a_j+\alpha_j s+a_j t)$, $j=1, 2, ..., m_1$ के पोल कंटूर L_2 के बाईं ओर पड़ें। आगे भी धन पूर्णांक p_1, p_2, p_3 $m_1, m_2, m_3, q_1, q_2, q_3, n_2, n_3$ निम्नांकित असमिकाओं की तुष्टि करते हैं।

$$q_2, q_3 \geqslant 1;\ p_1, q_1 \geqslant 0;\ 0 \leqslant m_1, m_2, m_3, n_2, n_3 \leqslant p_1, p_2, p_3, q_2, q_3$$

$$p_1+p_2 \leqslant q_1+q_2;\ p_1+p_3 \leqslant q_1+q_3$$

जहाँ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ क्रमशः $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j, \lambda_j, \mu_j$ में से सबसे बड़े हैं। $x=0, y=0$ के मानों की उपेक्षा की गई है। यह फलन वैश्लेषिक होगा जब

$$|\arg x| < \left(\alpha m_1+\gamma m_2+\delta n_2-\frac{\alpha p_1}{2}-\frac{\gamma p_2}{2}-\frac{\beta q_1}{2}-\frac{\delta q_2}{2}\right)\pi$$

$$2(\alpha m_1+\gamma m_2+\delta n_2) > (\alpha p_1+\gamma p_2+\beta q_1+d q_2)$$

$$|\arg y| < \left(\alpha_{m_1}+\lambda_{m_3}+\mu_{n_3}-\frac{\alpha_{p_1}}{2}-\frac{\lambda_{p_3}}{2}-\frac{\beta_{q_1}}{2}-\frac{\beta_{q_3}}{2}\right)\pi$$

$$2(\alpha_{m_1}+\lambda_{m_3}+\mu_{n_3}) > (\alpha_{p_1}+\lambda_{p_3}+\beta_{q_1}+\mu_{q_3}) \qquad (B)$$

(1.1) के वाम पक्ष को इसके बाद से $A^*(x, y)$ के रूप में लिखा जावेगा यदि प्राचल दिये हुए हैं।

2. संकेतन तथा ज्ञात फल

$$A^{*\,m_1,\,0;\ m_2+2\theta,\ n_2+2\theta';\ m+2\phi,\ n+2\phi'}_{\ \ p_1,\,q_1;\ p_2+4\theta,\ q_2+4\theta';\ p_3+4,\ q_3+4\phi'}\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right|$$

$$[((a_{p_1}, \alpha_{p_1})) : ((b_{q_1}, \beta_{q_1}))]$$

(i) $[(\triangle(\theta; \rho-r), h), (\triangle(\theta; \sigma-r), h), ((c_{p_2}, \gamma_{p_2})), (\triangle(\theta; \rho_1-r), h), (\triangle(\theta; \sigma_1-r), h) : (\triangle(\theta'; \rho'-\xi_1)h_1)$

$(\triangle(\theta'; \sigma'-r_1), h_1)), (dq_2, \delta q_2)), (\triangle(\theta'; \rho_1'-r_1), h_1), (\triangle(\theta'; \sigma_1'-r_1), h_1]$

$[(\triangle(\phi; \rho_2-r_2), h_2), (\triangle(\phi; \sigma_2-r_2), h_2)((e_{p_3}, \lambda_{p_3}))), (\triangle(\phi; \rho'_2-r_2), h_2), (\triangle(\phi; \sigma_2'-r_2), h_2):$

$(\triangle(\phi'; \rho_3-r_3), h_3), (\triangle(\phi', \sigma_3-r_3), h_3), ((f_{q_3}, \mu_{q_3})), (\triangle(\phi'; \rho'_3-r_3), h_3)$

$(\triangle(\phi', \sigma_3'-r_3), h_3)]$

को इसके बाद

$$A^*\left[\begin{array}{c|c} x & [\quad]: (\triangle(\theta; \begin{vmatrix}\rho\\ \sigma\end{vmatrix}-r), h), ((\quad)), (\triangle(\theta; \begin{vmatrix}\rho_1\\ \sigma_1\end{vmatrix}-r), h); \\ & (\triangle(\theta'; \begin{vmatrix}\rho^1\\ \sigma^1\end{vmatrix}-\xi_1)h, ((\quad)), (\triangle(\theta'; \begin{vmatrix}\rho'_1\\ \sigma'_1\end{vmatrix}-r_1), h): \\ & (\triangle(\phi; \begin{vmatrix}\rho_2\\ \sigma_2\end{vmatrix}-\xi^2), h_2), ((\quad)), (\triangle(\phi; \begin{vmatrix}\rho_2'\\ \sigma_2'\end{vmatrix}-r_2), h_2); \\ y & (\triangle(\phi': \begin{vmatrix}\rho_3\\ \sigma_3\end{vmatrix}-r_3), h_3), ((\quad)), (\triangle(\phi' \begin{vmatrix}\rho_3'\\ \sigma_3'\end{vmatrix}-r_3), h_3) \end{array}\right].$$

के रूप में लिखा जावेगा।

(ii) $((a_{p_1}, \alpha_{p_1}))=(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2), \ldots (a_{p_1}, \alpha_{p_1})$

(iii) $(a_{2, p_1}, \alpha_{2, p_1})=(a_2, \alpha_2), (a_3, \alpha_3) \ldots (a_{p_1}, \alpha_{p_1})$

(iv) $\int_{L_1} \int_{L_2} = \int_{L_1\ L_2}$

(v) $\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{\infty} \sum_{r,\ r_1=0}^{\infty}$

(vi) $\triangle(\delta, a)=\frac{a}{\delta}, \frac{a+1}{\delta}, \ldots \ldots \frac{a+\delta-1}{\delta}$

(vii) $\sqrt{\pi}\ \Gamma(2z)=2^{2z-1}\ \Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2})$

(viii) $\Gamma(mz)=(2\pi)^{1/2(1-m)}\ (m)^{mz-1/2} \prod_{i=0}^{m-2} \Gamma(z+i/m)$

(ix) $\prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{a+r+i}{m}\right)=m^{-r}\ (a)r \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{a+i}{m}\right)$

$$\prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{\alpha+r-i}{m}\right)=m^{-r}(\alpha-m+1)r \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{\alpha-i}{m}\right) \tag{x}$$

$$\prod_{t=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{\alpha-r+i}{m}\right)=m^{-r}[(1-\alpha)_r]^{-1} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{\alpha+i}{m}\right) \tag{xi}$$

$$(\sin \phi/2)^{-2s}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(1-s)}\left[1+2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(s)r}{(1-s)r}\cos r\theta\right] \text{ जहाँ } 0\leqslant\phi\pi,\ R(1-2s)\geqslant 0. \tag{xii}$$

$$(\sin \phi)^{1-2s}=\frac{\Gamma(3/2-s)}{\Gamma(3/2)\,\Gamma(2-s)}\sum_{r=\sigma}^{\infty}\frac{(s)}{(2-s)r}\sin(2r+1)\phi \tag{xiii}$$

$$2F_1\left(\begin{matrix}a,\ b;\ 1\\ c\end{matrix}\right)=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \text{ जहाँ } R(c-a-b>0 \tag{xiv}$$

$$2F_1\left(\begin{matrix}a,\ b\\ 1+a-b\end{matrix};-1\right)=\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+\frac{1}{2}a)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}a-b)\,\Gamma(1+a)} \text{ जहाँ } R(b)<1 \tag{xv}$$

$$3F_2\left(\begin{matrix}\alpha,\beta,\gamma\\ \alpha-\beta+1,\ \alpha-\gamma+1\end{matrix};1\right)=\frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}\alpha)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}\alpha-\beta-\gamma)\,\Gamma(1+\alpha-\beta)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}\alpha-\beta)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}\alpha-\gamma)\,\Gamma(1+\alpha-\beta-\gamma)} \tag{xvi}$$

जहाँ $R(\alpha-2\beta-2\gamma)>-2$.

यदि $\alpha+\beta=1,\ \rho+\sigma=2\gamma+1$ तो (xvii)

$$3F_2\left(\begin{matrix}\alpha,\beta,\gamma\\ \rho,\rho\end{matrix};1\right)=\frac{\pi\,\Gamma(\rho)\,\Gamma(\nu)}{2^{2\gamma-1}\,\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\rho)\,\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\sigma)\,\Gamma(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\rho)\,\Gamma(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\sigma)}$$

जहाँ $R(\gamma)>0$.

$$3F_2\left(\begin{matrix}\alpha,\beta,\gamma\\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ \gamma+\frac{1}{2}\end{matrix};-1\right)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\,\Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\beta+\frac{1}{2})\,\Gamma(\gamma-\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\gamma-\beta+\frac{1}{2})} \tag{xviii}$$

$$4F_3\left(\begin{matrix}\alpha,\ 1+\frac{1}{2}\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ -1\\ \frac{1}{2}\alpha,\ \alpha-\beta+1,\ \alpha-\gamma+1\end{matrix}\right)=\frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma+1)} \tag{xix}$$

जहाँ $R(\alpha-2\beta-2\gamma)>-2$·

$$5F_4\left(\begin{matrix}\alpha,\ 1+\frac{1}{2}\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta;\ 1\\ \frac{1}{2}\alpha,\ \alpha-\beta+1,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\delta+1\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\alpha-\delta+1)(\alpha-\beta-\gamma-\delta+1)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma+1)\,\Gamma(\alpha-\gamma-\delta+1)\,\Gamma(\alpha-\delta+\beta+1)} \tag{xx}$$

जहाँ $R(\alpha-\beta-\gamma-\delta)>-1$.

धन पूर्णांकों के समुच्चय को I^+ द्वारा व्यक्त किया जावेगा।

3. **प्रमेय**

प्रसार प्रमेय I: यदि

(i) प्रतिबन्ध B

(ii) $0\leqslant\theta\leqslant\pi$; $0\leqslant\phi\leqslant\pi$

(iii) $R(1-2c_1)\geqslant0$; $R(1-2d_1)\geqslant0$; $R(1-2e_1)\geqslant0$; $R(1-2f_1)\geqslant0$

तो
$$A^*\left[\begin{matrix}x^{\gamma_1}\\ y\end{matrix}\,[\,]:((\;)),(c_1,\gamma_1):(c_1-\tfrac{1}{2},\gamma_1),((\;)):[\,]\right]$$
$$+A^*\left[\begin{matrix}x\\ y^{\lambda_1}\end{matrix}\Bigg|\,[\,]:\{\,\}:((\;)),(e_1,\lambda_1):(e_1-\tfrac{1}{2},\lambda_1),((\;))\right]$$
$$+2\sum_{\xi=1}^{\infty}\frac{\cos r\theta.}{y^{\gamma_1}\,r}\,A^*\left[x^{\gamma_1}\,\Big|\,[\,]:(c_1+\gamma_1r-r,\gamma_1),((c_2,p_1+\gamma_2,p_2r,\gamma_2,p_2)),\right.$$
$$\left.(c_1+\gamma_1r\cdot\gamma_1):(c_1-\tfrac{1}{2}+\gamma_1r,\gamma_1),((\;)):\{\,\}\right]$$
$$+2\sum_{\xi=1}^{\infty}\frac{\cos r_1\phi}{y^{\lambda_1r_1}}\,A^*\left[\begin{matrix}x\\ y^{\lambda_1}\end{matrix}\Bigg|\,[\,]:\{\,\}:(e_1+\lambda_1r_1\;\;r_1,\lambda_1),((e_2,p_3+\lambda_2,p_3\,r_1,\lambda_2,p_3))\right.$$
$$\left.(e_1+\lambda_1r+r_1,\lambda_1);(e_1-\tfrac{1}{2}+\lambda_1r_1,\lambda_1),((\;))\right]$$
$$=(\sin A/2)^{2c_1-2}\sqrt{\pi}\,A^*\left[\begin{matrix}(x/\sin^2\theta/2)^{\gamma_1}\\ y\end{matrix}\right]+(\sin\phi/2)^{2e_1-2}\sqrt{x}\,A^*\left[\begin{matrix}x\\ (y)\lambda_1/\sin^2\phi/2)^{\lambda_1}\end{matrix}\right]\qquad(3\cdot1)$$

उपपत्ति :

(1.1) में से A^* फलन के मान को (3.1) के बामपक्ष में लिखने, समाकलन तथा संकलन के क्रम को बदलने पर, जो कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है, $S+r$ को S द्वारा प्रतिस्थापित करने, सरल करने, (2.xii) का उपयोग करने तथा (1.1) की सहायता से व्याख्या करने पर (3.1) का दायां पक्ष प्राप्त होता है।

प्रसार प्रमेय II: यदि

(i) प्रतिबन्ध B

(ii) $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$;

(iii) $R(1-2c_1) \geqslant 0$, $R(1-2d_1) \geqslant 0$, $R(1-2e_1) \geqslant 0$, $R(1-2f_1) \geqslant 0$

तो

$$\sum_{r=0}^{\infty} x^{-\gamma_1 r} \sin(2r+1)\theta \; A^* \begin{bmatrix} x^{\gamma_1} \\ y \end{bmatrix} [\,]: (c_1+\gamma_1 r-r, \gamma_1)\, ((c_{2,p_2}+\gamma_{2,p_2} r, \gamma_{2,p_2})).$$

$$(c_1+1+r+\gamma_1 r, \gamma_1): (c_1+\gamma_1 r+\tfrac{1}{2}, \gamma_1)\, ((dq_2+\delta q_2 r, \delta q_2)): [\,]$$

$$+\sum_{r=0}^{\infty} y^{-\lambda_1 r_1} \sin(2\xi_1+1)\phi \; A^* \begin{bmatrix} x \\ y\, \lambda_{1_1} \end{bmatrix}: \{\}\, (e_1+\lambda_1 r_1-r_1, \lambda_1), ((e_{2,p_3}+\lambda_{2,p_3} r_1, \lambda_{2,p_3}))$$

$$(e_1+1+r_1+\lambda_1 r_1, \lambda_1): (e_1+\lambda_1 r_1+\tfrac{1}{2}, \lambda_1)\, ((fq_3+\mu q_3 r_1, \mu q_3)\Big]$$

$$= \tfrac{1}{2}/\pi\, (\sin\theta)^{2c_1-1} \; A^* \begin{bmatrix} (x/\sin^2\theta)^{\gamma_1} \\ y \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, (\sin\phi)^{2e_1-1} \; A^* \begin{bmatrix} x \\ (y/\sin^2\phi)^{\gamma_1} \end{bmatrix} \qquad (3\cdot 2)$$

उपपत्ति :

जिस प्रकार (3.1) के लिये तुच्छ है (2.xiii) को (2.xii) के स्थान पर व्यवहृत करें।

प्रसार प्रमेय III: यदि

(i) प्रतिबन्ध B

(ii) $R(c+\rho+\sigma)>2$, $R(e+\rho'+\sigma')>2$; $h, h'>0$

(iii) $\lambda, \lambda', r, r_1 \in I^+$

तो

$$\sum_{r,\, r_1=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2r} \lambda'^{2r_1}}{r!\, r_1!\, \Gamma(c+r)\, \Gamma(e+r_1)} A^* \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} [\,]: \left(\triangle\left(\lambda; \begin{vmatrix} \rho \\ \sigma \end{vmatrix} - r\right), h\right), ((\quad)); ((\quad)):$$

$$\left(\triangle\left(\lambda'; \begin{vmatrix} \rho^1 \\ \sigma^1 \end{vmatrix} - r_1\right), h^1\right)), ((\;)): ((\;))\Big]$$

$$= \frac{2^{c+\rho+\sigma-3}\, \lambda^{-c+1/2}}{2^{-(e+\rho 1+\sigma 1-3)}\, \lambda'^{e-1/2}\, (\pi)}$$

$$A^*\left[\begin{matrix}(x/2^{2\lambda h})\\ \\ (y/2^{2\lambda^1 h^1})\end{matrix}\left|\begin{matrix}[\,]:(\triangle(\lambda;\left|\begin{matrix}\rho\\ \sigma\end{matrix}\right|),h),((\;)),(\triangle(\lambda;c-1+\left|\begin{matrix}\rho\\ \sigma\end{matrix}\right|),h);\\ (\triangle(2\lambda;(+\rho+\sigma-2),h),\;((\;)):\\ (\triangle(\lambda';\left|\begin{matrix}\rho^1\\ \sigma^1\end{matrix}\right|),h^1)\,((\;)),(\triangle(\lambda';e-1+\left|\begin{matrix}\rho^1\\ \sigma^1\end{matrix}\right|),h^1);\\ (\triangle(2\lambda';e+\rho'+\nu'-2),h^1),((\;))\end{matrix}\right.\right] \quad (3.3)$$

उपपत्ति :

(3.1) की ही भाँति तुच्छ होते हुये (2,x), (2.xiv), (2.viii) का उपयोग करते हैं।

प्रसार प्रमेय IV: यदि

(i) प्रतिबन्ध B

(ii) $R(\gamma)<1,\ R(\gamma')>1;\ h,\ h^1>0$

(iii) $\lambda,\ \lambda^1\ r,\ r_1\ \epsilon\ I^+$

तो
$$\sum_{r,\,r_1=0}^{\infty}\frac{(a)r\,(a_1)r_1}{r!\,r_1!}\,A^*\left[\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right|\,[\,]:((\;)),(\triangle(\lambda;1+\left|\begin{matrix}a+r\\ -r\end{matrix}\right|-\gamma),h);((\;)):$$
$$((\;)),(\triangle(\lambda';1+\left|\begin{matrix}a_1+r_1\\ -r_1\end{matrix}\right|-\gamma^1),h^1);((\;))\Big]$$
$$=\frac{\Gamma(a/2+1\;\Gamma(a\tfrac{1}{2}+1)\;\lambda/\tfrac{1}{2}a}{\Gamma(a+1)\;\Gamma(a^1+1)\;\lambda^{-1/2}\;a'}\,A^*\left[\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right|\;[\,]:((\;)),(\triangle(\lambda;\left|\begin{matrix}-\gamma\\ \tfrac{1}{2}a-\gamma\end{matrix}\right|+1),h);((\;)):$$
$$((\;)),(\triangle(\lambda';\left|\begin{matrix}-\gamma'\\ \tfrac{1}{2}a-\gamma'\end{matrix}\right|+1),h');((\;))\Big] \quad \dots \quad \dots \quad (3.4)$$

उपपत्ति :

(3·3) की ही भाँति तुच्छ होते हुये (2.ix) तथा (2.xi) और (2.xv) तथा (2.viii) का भी उपयोग करते हैं।

प्रसार प्रमेय V: यदि

(i) प्रतिबन्ध B

(ii) $R(2a+2\beta-3k)>2,\ (2a^1+2\beta^1-3k^1)>2);\ h,\ h^1>0$

(iii) $\lambda,\ \lambda^1,\ r,\ r_1\ \epsilon\ I^+$

तो
$$\sum_{r,\,r_1=0}^{\infty}\frac{(k)_r\,(k^1)r_1}{r!\,r_1!}$$

$$A^*\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}[\,]: (\lambda; -k-r+\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}), h), ((\ \ )), (\triangle(\lambda, r+\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}); ((\ \ )):$$

$$(\triangle(\lambda^1; -k-r_1+\begin{vmatrix}\alpha^1\\\beta^1\end{vmatrix}), h^1), ((\ \ )), (\triangle(\lambda^1, r_1+\begin{vmatrix}\alpha^1\\\beta^1\end{vmatrix}), h^1; ((\ \ ))\Big]$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}k+1)\,\Gamma(\frac{1}{2}k^1+1)\,\lambda^{1/2k}\,\lambda'^{1/2k_1}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k^1+1)}\,(\tfrac{1}{2})^{1/2}\,(k+k^1)$$

$$A^*\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}[\,]: (\triangle(\lambda; \begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}-k), h), ((\ \ )), (\triangle(\lambda; \begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}-\tfrac{1}{2}k), (\triangle(2\lambda; \alpha+\beta-k-1);$$
$$(\triangle(2\lambda; \alpha+\beta-3/2\,k-1), h)\,((\ \ )):$$
$$(\triangle(\lambda'; \begin{vmatrix}\alpha'\\\beta'\end{vmatrix}-k), h^1), ((\ \ )), (\triangle(\lambda'; \begin{vmatrix}\alpha'\\\beta'\end{vmatrix}-\tfrac{1}{2}k^1)$$
$$(\triangle(2\lambda'; \alpha^1+\beta'-k^1-1); (\triangle(2\lambda'; \alpha^1+\beta^1-3/2\,k^1-1), h'), ((\ \ ))\Big]$$

उपपत्ति :

(3.1) की ही भाँति तुच्छ होते हुये (2.xvi), (2.viii) का उपयोग करते हैं ।

प्रसार प्रमेय VI: यदि

(i) प्रतिबन्ध B

(ii) $R(2\alpha-2\beta)-3k), R(2\alpha^1-2\beta^1-3k^1)>0; h, h^1>0$

(iii) $\lambda, \lambda'\ r, r_1 \in I^+$

$$\text{तो}\ \sum_{r,\ r_1=0}^{\infty}\frac{(k)r,\ (k_1)r_1}{r!\ r_1!}\times$$

$$A^*\left[\begin{matrix}x\\ \\ \\y\end{matrix}\right|\begin{matrix}(\triangle(\lambda; \alpha-k-r), h), ((\ \ )), (\triangle(\lambda; \alpha+r), h);\\ \triangle(\lambda; \beta+k+r), h)\ ((\ \ )), (\triangle(\lambda; \beta-r), h)\\ (\triangle(\lambda'; \alpha^1-k^1-r_1), h'), ((\ \ )), (\triangle(\lambda^1; \alpha^1+r_1), h^1);\\ (\triangle(\lambda'; \beta^1+k^1+r_1), h^1), ((\ \ )), (\triangle(\lambda;' \beta^1-r_1), h^1)\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{\lambda^k\,\lambda^{1k^1}\,\Gamma(\frac{1}{2}k+1)\,\Gamma(\alpha-\beta-\frac{3}{2}k)\,\Gamma(\frac{1}{2}k^1+1)\,\Gamma(\alpha^1-\beta^1-\frac{3}{2}k^1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\alpha-\beta-k)\,\Gamma(k^1+1)\,\Gamma(\alpha^1-\beta^1-{}^1)}$$

$$A^*\left[\begin{matrix}x\\ \\ \\y\end{matrix}\right|\begin{matrix}[\,]: (\triangle(\lambda; \alpha-k), h), ((\ \ )), (\triangle(\lambda; \alpha-\tfrac{1}{2}k), h);\\ (\triangle(\lambda; \beta+k), h), ((\ \ )), (\triangle(\lambda; \beta+\tfrac{1}{2}k), h);\\ (\triangle(\lambda', \alpha'-k'), h'), ((\ \ )), (\triangle(\lambda'/; \alpha^1-\tfrac{1}{2}k^1), h');\\ (\triangle(\lambda^1; \beta^1+k^1), h'\ ((\ \ )), (\triangle(\lambda': \beta^1+\tfrac{1}{2}k^1), h^1)\end{matrix}\right] \quad (3.6)$$

उपपत्ति :

(3·5) की भाँति तुच्छ

प्रसार प्रमेय VII: यदि

(i) प्रतिबन्ध B

(ii) $R(\gamma-\alpha-\beta),\ R(\gamma^1-\alpha^1-\beta^1)>-\frac{1}{2};\ h,\ h^1>0$

(iii) $\lambda,\ \lambda^1,\ r,\ r_1 \in I^+$

तो $$\sum_{r,\ r^1=0}^{\infty} \frac{(2\alpha)_r\,(2\beta)_r\,(2\alpha^1)_{r_1}\,(2\beta^1)_{r_1}}{2^{r+r_1}\, r!\, r_1!\, (\alpha+\beta+\frac{1}{2})_r\,(\alpha^1+\beta^1+\frac{1}{2})_{r_1}} \times$$

$$A^*\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\ [\ ]: ((\ \ )), (\triangle(2\lambda;\ 2\gamma+r), h); (\triangle(\lambda;\ \gamma+r), h), ((\ \ )); \right.$$
$$\left. ((\ \ )), (\triangle(2\lambda';\ 2\alpha^1+r_1), h^1); (\triangle(\lambda';\ \gamma^1 r_1), h^1),\ ((\ \ ))\right]$$

$$=\frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^4\ \Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})\ \Gamma(\alpha^1+\beta^1+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\ \Gamma(\beta+\frac{1}{2})\ \Gamma(\alpha^1+\frac{1}{2})\ \Gamma(\beta^1+\frac{1}{2})}$$

$$A^*\left[\begin{matrix}x\\ \\ \\ y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[\ ]: ((\ \ )), (\triangle(2\lambda;\ 2\gamma), h), \left(\triangle\left(\lambda;\ \gamma+\tfrac{1}{2}-\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right|\right), h\right);\\ (\triangle(\lambda;\ \gamma), h), \left(\triangle\left(\lambda;\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-\alpha-\beta\end{matrix}\right|+\gamma\right), h\right), ((\ \ )):\\ ((\ \ )), (\triangle(2\lambda';\ 2\gamma'), h^1), \left(\triangle\left(\lambda';\ \gamma^1+\tfrac{1}{2}-\left|\begin{matrix}\alpha'\\ \beta'\end{matrix}\right|\right), h^1\right);\\ (\triangle(\lambda';\ \gamma'), h), \left(\triangle\left(\lambda';\ \left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-\alpha'-\beta'\end{matrix}\right|+\gamma^1\right), h^1\right), ((\ \ ))\end{matrix}\right] \quad (3.7)$$

उपपत्ति :

(3·1) की ही भाँति तुच्छ (2.ix), (2.viii) तथा

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}2\alpha,\ 2\beta,\ \gamma\\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ 2\gamma\end{matrix};\ 1\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\ \Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\ \Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})\ \Gamma(\gamma-\alpha-\beta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\ \Gamma(\beta+\frac{1}{2})\ \Gamma(\gamma-\alpha+\frac{1}{2})\ \Gamma(\gamma-\beta+\frac{1}{2})}$$

का उपयोग करते हैं जहाँ $R(\gamma-\alpha-\beta)>-\frac{1}{2}$

प्रसार प्रमेय VIII: यदि

(i) प्रतिबन्ध B

(ii) $h, h^1>0$,

(iii) $\lambda, \lambda^1, r, r_1 \in I^+$

तो $$\sum \frac{(\alpha)_r (\beta)_r (\alpha^1)_{r_1} (\beta^1)_{r_1}}{(\alpha+\beta+\frac{1}{2})_r (\alpha^1+\beta^1+\frac{1}{2})_{r_1} r! \, r_1!}$$

$$A^*\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right| [\,]: ((\;)), (\triangle(\lambda; \gamma+\tfrac{1}{2}+r), h); (\triangle(\lambda, \lambda+r), h), ((\;)): ((\;)),$$

$$(\triangle(\lambda', \gamma^1+\tfrac{1}{2}+r_1), h^1); (\triangle(\lambda^1, r^1+r_1), h^1), ((\;))\Big]$$

$$=\frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 \, \Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2}) \, \Gamma(\alpha^1+\beta^1+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2}) \, \Gamma(\beta+\frac{1}{2}) \, \Gamma(\alpha^1+\frac{1}{2}) \, \Gamma(\beta^1+\frac{1}{2})}$$

$$A^*\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right| [\,]: ((\;)), \left(\triangle\left(\lambda; \left|\begin{matrix} \gamma-\alpha \\ \gamma-\beta \end{matrix}\right| + \tfrac{1}{2}\right), h\right); \left(\triangle\left(\lambda; \left|\begin{matrix} \gamma \\ \gamma-\alpha-\beta+\frac{1}{2} \end{matrix}\right|\right), h\right),$$

$$((\;)): ((\;)), \left(\triangle\left(\lambda'; \left|\begin{matrix} \gamma^1-\alpha^1 \\ \gamma^1-\beta^1 \end{matrix}\right| + \tfrac{1}{2}\right), h^1\right); \left(\triangle\left(\lambda^1; \left|\begin{matrix} \gamma' \\ \gamma'-\alpha'-\beta'+\frac{1}{2} \end{matrix}\right|\right), h^1\right), ((\;))\Big] \quad (3{\cdot}8)$$

उपपत्ति :

(3·7) की ही तरह तुच्छ (2.xviii) का प्रयोग करते हैं ।

प्रसार प्रमेय IX: यदि

(i) प्रतिबन्ध B

(ii) $R(\lambda), R^1(\lambda')>0; h, h^1>0$

(iii) $\lambda, \lambda^1, r, r_1 \in I^+$

तो $$\sum_{r, r_1=0}^{\infty} \frac{(2\alpha)_r (1-2\alpha)_r (2\alpha^1)_{r_1} (1-2\alpha^1)_{r_1}}{r! \, r_1! \, 2^{r+r_1} (2\rho)_r (2\rho')_{r_1}}$$

$$A^*\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right| [\,]: ((\;)), (\triangle(2\lambda; 2\lambda-2\rho)+1+r), h); (\triangle(\lambda; \gamma+r), h),$$

$$((\;)): ((\;)), (\triangle(2\lambda^1; 2\gamma^1-2\rho^1+1-r_1), h'); (\triangle(\lambda'; \gamma^1+r_1), h')((\;))\Big]$$

$$=\frac{\Gamma(\rho) \, \Gamma(\rho+\frac{1}{2}) \, \Gamma(\rho^1) \, \Gamma(\rho^1+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\rho) \, \Gamma(\frac{1}{2}-\alpha+\rho) \, \Gamma(\alpha^1+\rho^1) \, \Gamma(\frac{1}{2}-\alpha^1+\rho^1)}$$

$$A^*\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\,[\ ]:((\ )),(\triangle(\lambda;\left|\begin{matrix}\alpha+\frac{1}{2}\\1-\alpha\end{matrix}\right|+\gamma-\rho),h):(\triangle(\lambda,\gamma),h),\right.$$
$$\left.((\ )):((\ )),(\triangle(\lambda^1;\left|\begin{matrix}\alpha'+\frac{1}{2}\\1-\alpha'\end{matrix}\right|+\gamma^1-\rho^1),h^1);(\triangle(\lambda^1,\gamma^1),h^1),((\ ))\right] \quad (3\cdot9)$$

उपपत्ति :

(3·1) की तरह तुच्छ (2.ix), (2.xvii), (2.vii) तथा (2.viii) का उपयोग करते हैं।

प्रसार प्रमेय X: यदि

(i) प्रतिबन्ध B

(ii) $R(\alpha-2\beta-2\gamma), R(\alpha^1-2\beta^1-2\gamma^1)>-2; h, h^1>0$

(iii) $\lambda, \lambda^1, r, r_1 \in I^+$

तो

$$\sum_{r,\,r_1=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+r_1}(\alpha)_r(\frac{1}{2}\alpha+1)_r(\alpha^1)_{r_1}(\frac{1}{2}\alpha^1+1)_{r_1}}{r!\,r_1!\,(\frac{1}{2}\alpha)_r(\frac{1}{2}\alpha^1)_{r_1}}$$

$$A^*\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\,[\ ]:((\ )),(\triangle(\lambda;\alpha+1+r-\left|\begin{matrix}\beta\\\gamma\end{matrix}\right|),h),(\triangle(\lambda;1-r-\left|\begin{matrix}\beta\\\gamma\end{matrix}\right|),h);\right.$$
$$\left.((\ )):((\ )),(\triangle(\lambda^1;\alpha^1+1+r_1-\left|\begin{matrix}\beta^1\\\gamma^1\end{matrix}\right|),h^1),(\triangle(\lambda^1;1-r_1-\left|\begin{matrix}\beta^1\\\gamma^1\end{matrix}\right|)h),((\ ))\right]$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha+1/2}[\Gamma(\frac{1}{2})]^2\lambda^{1\alpha^1+1/2}}{2^{\alpha-\beta-\gamma+\alpha^1-\beta^1-\gamma^1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha^1+1)}\times$$

$$A^*\left[\begin{matrix}2^{2\lambda h}x\\2^{2\lambda^1h^1}y\end{matrix}\middle|\,[\ ]:((\ )),(\triangle(\lambda;1-\left|\begin{matrix}\beta\\\gamma\end{matrix}\right|),h),(\triangle(2\lambda;\alpha-\beta-\gamma+1),h);\right.$$
$$\left.((\ )):((\ )),(\triangle(\lambda';1-\left|\begin{matrix}\beta'\\\gamma'\end{matrix}\right|),h'),(\triangle(2\lambda^1;\alpha^1-\beta^1-\gamma^1-1),h^1);((\ ))\right]$$

उपपत्ति

(3·1) की ही भाँति तुच्छ (2.ix), (2.xi), तथा (2.xix), और (2.viii) का भी उपयोग करते हैं।

प्रसार प्रमेय XI: यदि

(i) प्रतिबन्ध B

(ii) $R(\alpha+\beta+\gamma-2k)>-2, R(\alpha^1+\beta^1+\gamma^1-2k^1)>-2; h, h^1>2$

(iii) $\lambda, \lambda^1, r, r_1 \in I^+$

तो $\sum_{r,\, r_1=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+r_1}\,(k)_r\,(\frac{1}{2}k+1)_r\,(k')_{r_1}(\frac{1}{2}k^1+1)_{r_1}}{r!\,(\frac{1}{2}k)_r\,r_1!\,(\frac{1}{2}k^1)_{r_1}}$

$$A^*\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\,\middle|\,[\;]:((\;)),(\triangle(\lambda;\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{vmatrix}+r),h),(\triangle(\lambda;\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{vmatrix}-k-r),h);((\;)):((\;))\right.$$
$$\left.(\triangle(\lambda^1;\begin{vmatrix}\alpha^1\\\beta^1\\\gamma^1\end{vmatrix}+r_1),h^1),(\triangle(\lambda';\begin{vmatrix}\alpha^1\\\beta^1\\\gamma^1\end{vmatrix}-k^1-r_1),h^1),))\right]$$

$$=\frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2\,\lambda^{k+1/2}\,\lambda'^{k^1+1/2}\,(\frac{3}{4})^{\alpha+\beta+\gamma-2k-5/2}}{(2)^{k+k_1}\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(k'+1)\,(\frac{3}{4})^{2k'+5/2-\alpha^1-\beta^1-\gamma^1}}$$

$$A^*\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\,[\;]:((\;)),(\triangle(\lambda;\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{vmatrix}-k),h),(\triangle(2\lambda;\begin{vmatrix}\alpha+\beta\\\beta+\gamma\\\gamma+\alpha\end{vmatrix}-k-1),h);\right.$$
$$(\triangle(3\lambda;\alpha+\beta+\gamma-2k-2),h)\;((\;)):$$
$$((\;)),(\triangle(\lambda^1;\begin{vmatrix}\alpha^1\\\beta^1\\\gamma^1\end{vmatrix}-k^1),h^1),(\triangle(2\lambda^1;\begin{vmatrix}\alpha^1+\beta^1\\\beta^1+\gamma^1\\\gamma^1+\alpha^1\end{vmatrix}-k^1-1),h^1);$$
$$\left.(\triangle(3';\alpha^1+\beta^1+\gamma^1-2k^1-2),h^1),((\;))\right]\qquad(3.11)$$

उपपत्ति

(3.10) की तरह तुच्छ (2.xx), (2.viii) का उपयोग करते हैं ।

4. विशिष्ट दशायें

निम्नांकित रूपरेखा विभिन्न ज्ञात विशिष्ट फलनों के रूप में रोचक विशिष्ट दशाओं को प्राप्त करने के लिये बनाई गई हैं :

(i) यदि (3.4) में $a_j=\beta_j=\gamma_j=\delta_j=\lambda_j=\mu_j=1$; $h=h^1=1$ तो हमें शर्मा का एक फलन $S(x, y)$ (1965*a*) प्राप्त होता है ।

$$\sum_{r,\,r_1=0}^{\infty}\frac{(a)_r\,(a_1)_{r_1}}{r!\,r_1!}\,S^{m_1,\,0;\,m_2,\,q_2,\,m_3,\,n_3}_{p_1-m_1,\,q_1;\,p_2+2\lambda-m_2,\,q_2-n_2;\,p_3+2\lambda^1-m_3,\,q_3-n_3}$$
$$\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,a_2,\dots a_{p_1};\,b_1,b_2,\dots b_{q_1}\\c_1,c_2,\dots c_{p_2};\,(\triangle(\lambda;1-\gamma+\begin{vmatrix}a+r\\-r\end{vmatrix}):d_1,\dots d_{q_2}\\e_1,e_2,\dots e_{p_3};\,\triangle(\lambda^1;1-\gamma^1+\begin{vmatrix}a'+r_1\\-r_1\end{vmatrix}):f_1,\dots f_{q_3}\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{\Gamma(a/2+1)\,\Gamma(a'/2+1)\,\lambda^{1/2a}\,\lambda^{1\;1/2a_1}}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(a^1+1)}$$

$$S^{m_1\ 0; m_2,\ n_2;\ m_3,\ n_3}_{p_1-m_1\ q_1;\ p_2+2\lambda-m_2,\ q_2-n_2;\ p_3+2\lambda^1-m_3,\ q_3-n_3}$$

$$\left[\begin{array}{c|l} x & a_1, \ldots \ldots a_{p_1};\ b_1, \ldots \ldots b_{q_1} \\ & c_1, \ldots \ldots c_{p_2},\ \triangle(\lambda, 1-\gamma;\ \triangle(\lambda;\ \tfrac{1}{2}a-\gamma+1);\ d_1, \ldots d_{q_2} \\ y & e_1, \ldots \ldots e_{p_3},\ \triangle(\lambda';\ 1-\gamma^1), \triangle(\lambda';\ \tfrac{1}{2}a^1-\gamma^1+1);\ f_1, \ldots f_{q_3} \end{array}\right]$$

प्राचलों के और अधिक विशिष्टीकरण से अग्रवाल (1965b) $G(x, y)$ में एक सम्बन्ध प्राप्त होता है।

(ii) यदि (3.4) में $p_1=m_1=q_1=0$ तो हमें फाक्स फलन (1961) में एक सम्बन्ध प्राप्त होता है :

$$\sum_{r,\ r_1=0}^{\infty} \frac{(a)_r\ (a_1)_{r_1}}{r!\ r!}\ H^{n_2,\ m_2}_{p_2+2\lambda,\ q_2}\left[x \,\Big|\, \{((c_{p_2}, \gamma_{p_2})), (\triangle(\lambda;\ 1-\gamma+a+r), h), (\triangle(\lambda;\ 1-\gamma-r), h) : ((d_{q_2}, \delta_{q_2}))\right]$$

$$\times H^{n_3,\ m_3}_{p_3+2\lambda'\ q_3}\left[y \,\Big|\, \{((e_{p_3}, \lambda_{p_3})), (\triangle(\lambda^1;\ 1-\gamma^1+a^1+r_1), h^1), (\triangle(\lambda;\ 1-\gamma-r), h) : ((f_{q_3}, \mu_{q_3}))\right]$$

$$= \frac{\lambda^{1/2a}\ \lambda'^{1/2a'}\ \Gamma(a/2+1)\ \Gamma(a^1/2+1)}{\Gamma(a+1)\ \Gamma(a^1+1)}\ H^{n_2,\ m_2}_{p_2+2\lambda,\ q_2}\left[x \mid ((c_{p_2}, \gamma_{p_2})), (\triangle(\lambda;\ 1-\gamma), h), (\triangle(\lambda;\ \tfrac{1}{2}a-\gamma+1), h); ((d_{q_2}, \delta_{q_2}))\right]$$

$$\times H^{n_3,\ m_3}_{p_3+2\lambda^1,\ q_3}\left[y \,\Big|\, ((e_{p_3}, \lambda_{p_3})), (\triangle(\lambda^1;\ 1-\gamma^1)h^1,) (\triangle(\lambda^1;\ \tfrac{1}{2}a^1-\gamma^1+1), h^1) : ((f_{q_3}, \mu_{q_3}))\right] \qquad (4.2)$$

(iii) यदि हम (4·2) में $a_j=\beta_j=\gamma_j=\delta_j=\lambda_j=\mu_j=1;\ h=h^1=1$ लिखें तो हमें विख्यात माजइर के G-फलन का एक सम्बन्ध प्राप्त होता है।

$$\sum_{r,\ r_1=0}^{\infty} \frac{(a)_r\ (a_1)_{r_1}}{r!\ r_1}\ G^{n_2,\ m_2}_{p_2+2\lambda,\ q_2}\left[x \,\Big|\, c_1, \ldots \ldots, c_{p_2},\ \triangle(\lambda;\ 1-\gamma+a+r), \triangle(\lambda;\ 1-\gamma-r) : d_1, \ldots d_{q_2}\right]$$

$$\times G^{n_3,\ m_3}_{p_3+2\lambda^1,\ q_3}\left[y \,\Big|\, c_1, \ldots, c_{p_3},\ \triangle(\lambda^1;\ 1-\gamma^1+a^1+r_1), \triangle(\lambda^1;\ 1-\gamma^1-r_1) : f_1, \ldots f_{q_3}\right]$$

$$=\frac{\lambda^{1/2}\,\lambda'^{1/2}\,\Gamma(a/2+1)\,\Gamma(a^1/2+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(a^1+1)}$$

$$\times G^{n_2,\,m_2}_{p_2+2\lambda,\,q_2}\left[x\,\middle|\,c_1,\ldots\ldots c_{p_2},\,\triangle(\lambda;\,1-\gamma),\ \triangle(\lambda;\,\tfrac{1}{2}a-\gamma+1):\,d_1,\ldots d_{q_2}\right]$$

$$\times G^{n_3,\,m_3}_{p_3+2\lambda',\,q_2}\left[y\,\middle|\,e_1,\ldots e_{p_3},\,\triangle(\lambda^1;\,1-\gamma^1),\,\triangle(\lambda^1;\,\tfrac{1}{2}a^1-\gamma^1+1):f_1,\ldots,f_{q_3}\right]\quad(4.3)$$

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस**, 1965, **31A**, 536-45
2. चतुर्वेदी, के० के० तथा गोयल, ए० एम०, **इंडि० जर्न० प्योर एप्लाइड मैथ०**, 1972, 3, 357-60
3. फाक्स सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429
4. गोस्वामी, एम० के०, चतुर्वेदी, के० के० तथा गोयल, ए० एन०, **इंडि० जर्न प्योर एप्लाइड मैथ** (प्रेस में), 1971
5. शर्मा, बी० एल० Annals de. Soc. Sci. de Bruxelles, 1965, 79 I, 26-40

जैकोबी श्रेणी की बोरेल संकलनीयता

सरजू प्रसाद यादव

गणित तथा सांख्यिकी अध्ययनशाला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—जनवरी 12, 1976]

सारांश

इस शोध-पत्र में बिन्दु $x, (-1<x<1)$ पर हम जैकोबी श्रेणी की बोरेल संकलनीयता से सम्बन्धित एक प्रमेय सिद्ध करेंगे।

Abstract

On Borel-summability of Jacobi series. *By* Sarjoo Prasad Yadav, School of Studies in Mathematics and Statistics, Vikram Uuiversity, Ujjain.

In the present paper, we shall prove a theorem on the Borel summability of Jacobi series at the internal point of the interval $[-1, +1]$.

1. लेबेस्क समाकलनीय फलन $f(x)$ से सम्बन्धित जैकोबी श्रेणी निम्नांकित है,

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \tag{1·1}$$

जहाँ

$$a_n = \frac{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1) \cdot \Gamma(n+\beta+1)} \cdot \frac{2n+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}} \cdot \int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \cdot P_n^{(\alpha, \beta)}(x) f(x)\, dx \tag{1·2}$$

$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$, n-वाँ जैकोबी बहुपद (α, β) कोटि का है। यहाँ हम $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \cdot f(x)$ को लेबेस्क मापनीय मानते हैं, तथा (1·2) में समाकलन की अवस्थिति मान ली गई है। हम निम्न चिन्ह प्रयुक्त करते हैं।

$$\phi(t) = f(x \pm t) - f(x) \tag{1·3}$$

$$f(x)=f(\cos\gamma),\ \ [-1<x<1] \tag{1·4}$$

2. फूरिये श्रेणी की बोरेल-संकलनीयता साहनी[3] और लेगेण्ड्र श्रेणी की बोरेल संकलनीयता का अध्ययन व्यवहार[1] ने किया है। हम निम्न प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय

माना कि $-\frac{1}{2}<(\alpha, \beta)<+\frac{1}{2}$ और अंतराल $[-1, +1]$ के किसी बिन्दु x पर

$$\int_0^t |\phi(t)|\, du=0\left\{\frac{t}{\log 1/t}\right\},\ t\to 0 \tag{2·1}$$

तब श्रेणी (1·1) बिन्दु x पर बोरेल समाकलनीय होगी या समाकलनीय (B) होगी।

हम झेगो[4] की पुस्तक में दिए गए जैकोबी बहुपद की कोटियों का प्रयोग करेंगे। साथ ही निम्न प्रमेयिका की आवश्यकता होती है।

प्रमेयिका[2]

यदि
$$\psi(u)=[f\{\cos(\gamma-u)\}-f(\cos\gamma)] \tag{2·2}$$

तो प्रतिबन्ध (2·1) से हम निम्न परिणाम पाते हैं।

$$\Psi(h)\equiv\int_0^h |\psi(u)|\, du=0\left\{\frac{h}{\log(1/h)}\right\},\ h\to 0 \tag{2·3}$$

जहाँ $\rho+\tau<\gamma<\pi-(\rho+\tau),\ \rho+\tau<\frac{1}{2}\pi,\ 0<\rho<\frac{1}{2}\pi,\ \tau>0$ हैं।

3. **प्रमेय की उपपत्ति**

श्रेणी (1·1) का x बिन्दु पर n-वाँ आंशिक योग यदि $s_n(x)$ हो तो, हम पाते हैं कि

$$R_n(x)\equiv s_n(x)-f(x)=k_n\int_{-1}^{+1}\frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t)\ P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-P_n^{(\alpha,\beta)}(t)\ .\ P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{t-x}\times (1-x)^{\alpha}(1+)^{\beta}[f(t)-f(x)]\, dt \tag{3·1}$$

जहाँ पर

$$k_n=\frac{2^{-\alpha-\beta}}{2n+\alpha+\beta+2}\cdot\frac{\Gamma(n+2)\ .\ \Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\ .\ \Gamma(n+\beta+1)}\sim O(n)$$

फिर

$$\mathrm{R}_n(x)=k_n\left[\int_{-1}^{-1+\mu'_x}+\int_{-1+\mu_x}^{x+\mu_x}+\int_{x-\mu'_x}^{x+\mu'_x}+\int_{x+\mu'_x}^{1-\mu'_x}+\int_{1-\mu'_x}^{1}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{5} J_i\ \ (\text{माना})$$

μ_x और μ'_x को हम सरलता और स्पष्टता की दृष्टि से इस प्रकार परिभाषित करते हैं। मान लिया कि $s=\mu+\epsilon<1$ जहाँ पर μ और ϵ दो वास्तविक संख्याएँ हैं कि $0<\epsilon<\mu$. हम तदर्थ रूप से μ_x और μ'_x दो x का फलन इस प्रकार लेते हैं कि, $-1<x<1$, $\epsilon\leqslant\mu_x\leqslant\mu$ और $\epsilon\leqslant\mu'_x\leqslant\mu$ ताकि $\mu_x<x+1-\mu'_x$ और $\mu_x<1-x-\mu'_x$.

अब

$$J_2=k_n\int_{-1+\mu_x}^{x-\mu_x}\frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-P_n^{(\alpha,\beta)}(t)\,.\,P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{t=x}\,.\,(1-t)^\alpha(1+t)^\beta.\,[f(t)-f(x)]\,dt$$

$=J_{2\cdot1}+J_{2\cdot2}$ (माना)

हम $t=\cos\omega$, $x=\cos\gamma$ और $\left[\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\omega-(\alpha+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi\right]$ को ω'_{n+1} से प्रदर्शित करते हैं। अंतराल $-1<x<+1$ में जैकोबी बहुपद की कोटियों का प्रयोग करते हुए हम पाते हैं कि

$$J_{2\cdot1}=\frac{k_nP_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\gamma)\,.\,2^{\alpha+\beta}}{\pi^{1/2}\,(n+1)^{1/2}}\int_{-1+\mu_x}^{x+\mu_x}\left[\frac{\cos\omega'_{n+1}}{(\sin\frac{1}{2}\omega)^{\alpha+1/2}(\cos\frac{1}{2}\omega)^{\beta+1/2}}+O(n^{-1})\right].$$

$$\frac{[f(\cos\omega)-f(\cos\gamma)]}{2\sin\frac{\omega+\gamma}{2}\,.\,\sin\frac{\gamma-\omega}{2}}(\sin\tfrac{1}{2}\omega)^{2\alpha}(\cos\tfrac{1}{2}\omega)^{2\beta}\,.\,\sin\omega\,d\omega.$$

$J_{2\cdot1}$ का प्रथम भाग रीमाँ-लेबेस्क प्रमेय द्वारा और द्वितीय भाग $n\rightarrow\infty$ पर शून्य हो जायेगा। इसी प्रकार $J_{2\cdot2}=0(1)$ तथा इसी तरह J_4. J_5 और J_1 भी शून्य हो जाते हैं। यहाँ J_5 का हल प्रदर्शित करना पर्याप्त समझते हैं।

J_5 का प्रथम योग निम्नवत् है।

$$J_{5\cdot1}=O(n^{1/2})\left[\int_{1-\mu'_x}^{1-\mu'_x+\phi}+\int_{1-\mu'_x+\phi}^{1}\right]$$

$=J_{5\cdot1\cdot1}+J_{5\cdot1\cdot2}$ (माना)

हम यहाँ भी $t=\cos\omega$, $x=\cos\gamma$ लिखते हैं। पुनः $\cos\delta'=1-\mu'_x$ और $\cos\delta=1-\mu'_x+\phi$ इस प्रकार लेते हैं कि $\delta\rightarrow0$ जैसे कि $n^{-1}\rightarrow0$.

सीधे हल करते हुए

$$J_{5\cdot1\cdot1}=O(1)$$

और

$$J_{5\cdot1\cdot2}=O(n^{\alpha+1/2})\ .\int_0^{\delta}(\sin\tfrac{1}{2}\omega)^{2\alpha+1}(\cos\tfrac{1}{2}\omega)^{2\beta+1}\ .\ |f(\cos\omega)-f(\cos\gamma)|\ d\omega$$

$$=O(n^{\alpha+1/2})O(\delta)$$

$$=O(n^{\alpha-1/2})=O(1)$$

अंततोगत्वा हमें $J_5=O(1)$ प्राप्त होता है। अब हम J_3 को हल करते हैं। J_3 के प्रथम खण्ड को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$J_{3\cdot1}=2^{\alpha+\beta}\ .\ k_n\int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta}\frac{P_{n+1}^{(\alpha,\ \beta)}(\cos\omega)P_n^{(\alpha,\ \beta)}(\cos\gamma)}{\cos\omega-\cos\gamma}(\sin\tfrac{1}{2}\omega)^{2\alpha+1}(\cos\tfrac{1}{2}\omega)^{2\beta+1}$$
$$|f(\cos\omega)-f(\cos\gamma)|\ d\omega$$

स्पष्टतया $0<\gamma<\pi$ और $0<\omega<\pi$ होने से हम γ को इस प्रकार सुनिश्चित करते हैं कि

$$\rho+\tau\leqslant\gamma\leqslant\pi-(\rho+\tau)$$

$$\eta=\min[\text{arc}\ x,\ \text{arc}\ (x+\mu)],\ 0<\eta\leqslant\tau$$

इस प्रकार झेगो[4] पृष्ठ 252 पर दिए गए परिणाम के सम्प्रयोग से J_3 को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$J_3=\int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta}2^{-\alpha-\beta}\ k(\omega)k(\gamma)\left\{\frac{\sin[(N+\frac{1}{2})(\omega+\gamma)+2\gamma_1]}{\sin\frac{\omega+\gamma}{2}}+\frac{\sin[(N+\frac{1}{2})(\omega-\gamma)]}{\sin\frac{\omega-\gamma}{2}}\right.$$
$$\left.+O(1)\right\}(\sin\tfrac{1}{2}\omega)^{2\alpha+1}(\cos\tfrac{1}{2}\omega)^{2\beta+1}\ .\ |f(\cos\omega)-f(\cos\gamma)|\ d\omega$$

$$=J_{3\cdot1}+J_{3\cdot2}+J_{3\cdot3}\ \text{(माना)}$$

अब रीमाँ-लेबेस्क प्रमेय द्वारा $J_{3\cdot1}=0(1)$ और प्रमेयिका 1 द्वारा $J_{3\cdot3}=0(1)$ है। फिर समाकलीय चर को $\omega-\gamma=u$ में परिवर्तित कर $\sin\left(n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)u=\sin nu\cos\frac{\alpha+\beta+2}{2}u+\cos nu$ $\sin\frac{(\alpha+\beta+2)}{2}u$ में परिणत करते हुए हम निम्नलिखित परिणाम पर पहुँचते हैं।

$$J_{3\cdot2}=\int_{-\eta}^{\eta}A\frac{\sin nu}{\sin\frac{1}{2}u}\psi(u)\ du+\int_{-\eta}^{\eta}B\cos nu\ .\ \psi(u)\ du$$

$$=J_{3\cdot2\cdot1}+J_{3\cdot2\cdot2}\ \text{(माना)}$$

जहाँ A और B सीमित अप्रभावी फलन हैं।

स्पष्ट है कि

$$J_{3\cdot2\cdot2}=0(1).$$

अब प्रमेय को सिद्ध करने के लिए मात्र यह प्रदर्शित करना पर्याप्त है कि

$$\sigma_{n\cdot p}\to 0 \text{ जैसे ही } p\to\infty;$$

जहाँ पर

$$\sigma_{n\cdot p}=e^{-p}\int_{-\eta}^{\eta}\frac{\psi(u)}{\sin\frac{1}{2}u}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nu}{n\,!}p^n\right)du \tag{3·2}$$

अब

$$\sigma_{n\cdot p}=\int_{-\eta}^{-1/p}+\int_{-1/p}^{+1/p}+\int_{1/p}^{\eta}=I_1+I_2+I_3 \quad (\text{माना})$$

चूंकि

$$e^{-p}\sum_{0}^{\infty}\frac{\sin nu}{n\,!}p^n=\frac{\sin(p\sin u)}{\exp[p(1-\cos u)]}$$

अतः

$$I_2=\int_{-1/p}^{+1/p}\frac{|p\sin u|}{\sin\frac{1}{2}u}\cdot\frac{|\psi(u)|}{\exp[p(1-\cos u)]}du$$

$$=O(p)\,.\,0\left(\frac{1}{p\log 1/p}\right)$$

$$=0(1) \text{ जैसे } p\to\infty.$$

और

$$I_3=\int_{1/p}^{\eta}\frac{\psi(u)}{\sin\frac{1}{2}u}\cdot\frac{\sin(p\sin u)}{\exp[p(1-\cos u)]}du$$

$$=\int_{1/p}^{1/p^{\alpha'}}+\int_{1/p^{\alpha'}}^{\eta}=I_{3\cdot1}+I_{3\cdot2} \quad (\text{माना})$$

$$(0<\alpha'<\tfrac{1}{2})$$

यहाँ सीधे हल करने पर

$$I_{3\cdot1}=\frac{1}{\exp[2p\sin^2 1/2p]}\int_{1/p}^{1/p^{\alpha'}}\frac{|\psi(u)|}{u}du$$

यहाँ $|\psi(u)|\,\frac{1}{u}$ को प्रथम भाग एवं $1/u$ को द्वितीय भाग मान कर खण्डशः समाकलन विधि द्वारा हल करने पर और प्रमेयिका 1 का सम्प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि—

$$I_{3\cdot1}=0(1)$$

आगे हल करते हुए इसी प्रकार $J_{3\cdot2}=0(1)$ । इसी प्रकार की अवस्था I_1 में भी विद्यमान है । अंततः यह सिद्ध हो जाता है कि

$$\sigma_{n\cdot p}\to 0 \text{ जैसे } p\to\infty$$

इस प्रकार प्रमेय सिद्ध हो जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा०घनश्याम पाण्डे का आभारी है, जिनके निर्देशन में यह शोध-पत्र तैयार करते हुए तथा अन्य शोधपत्रों के साथ, लेखक ने पी-एच० डी० उपाधि प्राप्त की ।

निर्देश

1. व्यवहार, बी० के०, **विक्रम मैथ० जर्न ० विक्रम युनिवर्सिटी, उज्जैन**, 1967, **2**, 17-23.
2. गुप्ता, डी० पी०, **जर्न० युनि० सागर (म० प्र०)** 1957, **6**, 37-43.
3. साहनी, वी० एन०, **जर्न० इण्डियन मैथ० सोसा०**, 1961, **25**,
4. झेगो, जी०, Orthogonal Polynomials. कोलो० पब्लि० न्यूयार्क 1959.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 1, January, 1976, Pages 77-81

अवकलज फूरियर श्रेणी की परम लागरैथ्मिक संकलनीयता

एल० पी० गौतम

रामपुर बघेलन, सतना

[प्राप्त—जुलाई 19, 1974]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में यह दिखाया गया है कि $|R, \log n, 1+\delta|$ संकलनीयता को $|R, \log n, 1|$ में समानीत किया जा सकता है।

Abstract

On the absolute logarithmic summability of a derived Fourier Series. *By* L. P. Gautam, Rampur Baghelan, Satna, M. P.

It has been shown that $|R, \log n, 1+\delta|$ summability can be reduced to $|R, \log n, 1|$.

परिभाषा : माना कि $\lambda = \lambda(\omega)$ संतत, अवकलनीय, तथा एकदिष्ट जो (c, ∞) में वृद्धि करता है c कोई जहाँ धन स्थिरांक है तथा $\lambda(\omega) \to \infty$ ज्यों ज्यों $\omega \to \infty$ श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ समाकलनीय $|R, \lambda(n), 1|$ कहलाती है।

यदि $$I = \int_c^\infty \frac{\lambda'(\omega)}{[\lambda(\omega)]^2} \left| \sum_{n \leqslant \omega} \lambda_n U_n \right| d\omega < \infty.$$

जहाँ c कोई निश्चित धन संख्या है।

माना कि $f(t)$ 2π आवर्त पर आवर्ती है और $(-\pi, \pi)$ तक लेबेस्क-समाकलनीय है और माना कि

$$f(t) \sim \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{1.1}$$

पहले हम निम्नांकित असमिकाओं की स्थापना करेंगें।

$$E(\omega, t)=O\left(\omega^2 \log \frac{k}{t}\right). \tag{3.1}$$

$$E(\omega, t)=O\left(\frac{\log k/t)}{t^2}\right). \tag{3.2}$$

(3.1) **की उपपत्ति :**

$$E(\omega, t)=\int_t^\pi \sum_{n\leqslant\omega} n \log \frac{k}{u} \sin \frac{nu}{u} au)$$

$$=\log \frac{k}{t} (\sum_{n\leqslant\omega} n \left(\int_t^\pi \frac{\sin nu}{u} du\right)$$

$$=O\left(\log \frac{k}{t} \sum_{n\leqslant\omega} n\right)$$

$$=O\left(\omega^2 \log \frac{k}{t}\right).$$

(3.2) **की उपपत्ति:**

$$E(\omega, t)=\int_t^\pi \left(\sum_{n\leqslant\omega} n \log \frac{k}{u} \frac{\sin nu}{u} du\right)$$

$$=\frac{\log k/t}{t} \sum_{n\leqslant\omega} n \left(\int_t^\pi \sin nu \, du \right)$$

$$=\frac{\log k|t}{t} \sum_{n\leqslant\omega} n \frac{\cos nt}{n}$$

$$=\frac{\log k|t}{t} \sum_{n\leqslant\omega} \cos nt$$

$$=O\left(\frac{\log k|t}{t^2}\right).$$

हमें निम्नांकित प्रमेयिका की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका [1]:

यदि (i) $\chi(t)=BV(0, \pi)$

पहले हम निम्नांकित असमिकाओं की स्थापना करेंगें ।

$$E(\omega, t)=O\left(\omega^2 \log \frac{k}{t}\right). \tag{3.1}$$

$$E(\omega, t)=O\left(\frac{\log k/t)}{t^2}\right). \tag{3.2}$$

(3.1) **की उपपत्ति :**

$$E(\omega, t)=\int_t^\pi \sum_{n\leqslant\omega} n \log \frac{k}{u} \sin \frac{nu}{u}\, au)$$

$$=\log \frac{k}{t} (\sum_{n\leqslant\omega} n \left(\int_t^\pi \frac{\sin nu}{u} du\right)$$

$$=O\left(\log \frac{k}{t} \sum_{n\leqslant\omega} n\right)$$

$$=O\left(\omega^2 \log \frac{k}{t}\right).$$

(3.2) **की उपपत्तिः**

$$E(\omega, t)=\int_t^\pi \left(\sum_{n\leqslant\omega} n \log \frac{k}{u} \frac{\sin nu}{u} du\right)$$

$$=\frac{\log k/t}{t} \sum_{n\leqslant\omega} n \left(\int_t^\pi \sin nu\, du\right)$$

$$=\frac{\log k|t}{t} \sum_{n\leqslant\omega} n \frac{\cos nt}{n}$$

$$=\frac{\log k|t}{t} \sum_{n\leqslant\omega} \cos nt$$

$$=O\left(\frac{\log k|t}{t^2}\right).$$

हमें निम्नांकित प्रमेयिका की आवश्यकता होगी ।

प्रमेयिका [1]:

यदि (i) $\chi(t)=BV\ (0, \pi)$

तथा (ii) $\int_0^\pi \frac{|\chi(t)\}|}{t} < \infty$

तो $$\int_0^\pi \frac{|d\{t^2\chi(t)\}|}{t^2} < \infty.$$

4. **प्रमेय की उपपत्ति :**

हम जानते हैं कि

$$n\,B_n(x) = \frac{2n}{\pi}\int_0^\pi \psi(t)\sin nt\,dt$$
$$= \frac{2n}{\pi}\int_0^\pi t\,\chi(t)\;\log\frac{k}{t}\sin nt\,dt$$

$\int_t^\pi \log\frac{k}{u}\sin nu\,du$ परिबद्ध है और लुप्त हो जाता है जब $t=\pi$,

अतः $$n\,B_n(x) = \frac{2n}{\pi}\int_0^\pi d\{t^2\lambda(t)\}\int_t^\pi \log\frac{k}{u}\sin\frac{nu}{u}\,du. \qquad (4.1)$$

श्रेणी $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\,B_n(x)}{\log(n+1)}$ संकलनीय $|R, \log\omega, 1|$, है यदि

$$I = \int_e^\infty \frac{d\omega}{\omega(\log\omega)^2}\left|\sum_{n\leqslant\omega}\log n\,\frac{n\,B_n(x)}{\log n}\right| < \infty.$$

(4.1) से

$$I = \int_0^\pi |d\{t^2\chi(t)\}|\int_e^\infty \frac{d\omega}{\omega(\log\omega)^2}\left|\int_t^\pi\left(\sum_{n\leqslant\omega} n\log\frac{k}{u}\frac{\sin nu}{u}\,du\right)\right|$$
$$= \int_0^\pi |d\xi t^2\chi(t)|\int_e^\infty \frac{d\omega}{\omega(\log\omega)^2}|E(\omega t)|$$

प्रमेयिका के द्वारा प्रमेय की संकल्पना का बोध होता है।

$$\int_0^\pi \frac{|d\{t^2\chi(t)\}|}{t^2} < \infty.$$

केवल इतना ही दर्शाना पर्याप्त होगा कि

$$K(t) = \int_e^\infty \frac{d\omega}{\omega(\log\omega)^2}|E(\omega\,.\,t)|$$
$$= 0(t^{-2}) \text{ यदि } 0 < t < \pi$$

हम निम्नवत लिखेंगे

$$K(t)=\left(\int_e^{k/t}\right)+\int_{k/t}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega(\log\omega)^2}|E(\omega\,.\,t)|$$

$$=K_1(t)+K_2(t) \text{ मानलें}$$

अब (1.1) के व्यवहार से

$$K_1(t)=O\left(\log\frac{k}{t}\int_e^{k/t}\frac{\omega^2 d\omega}{\omega\,(\log\omega)^2}\right)$$

$$=O\left(\frac{1}{t^2}\log\frac{k}{t}\int_e^{k/t}\frac{d\omega}{\omega(\log\omega)^2}\right)$$

$$=O\left(\frac{1}{t^2}\log\frac{k}{t}\left[\frac{1}{\log\omega}\right]_e^{k/t}\right)$$

$$=O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

इसी प्रकार (3.2) से

$$K_2(t)=O\left(\frac{\log k/t}{t^2}\int_{k/t}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega(\log\omega)^2}\right)$$

$$=O\left(\frac{1}{t^2}\log\frac{k}{t}\left[\frac{1}{\log\omega}\right]_{k/t}^{\infty}\right)$$

$$=O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

अत:

$$I=O\left(\int_0^{\pi}\frac{|d\{t^2\chi(t)\}|}{t^2}\right)$$

$$<\infty.$$

यही सिद्ध करना था।

निर्देश

1. मोहन्ती, आर० तथा रे, बी० के०, **इंडियन जर्न० मैथ०**, 1967, 9, 169-74

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 1, January, 1976, Pages 83-86

द्वैत श्रेणी समीकरण

पी० एल० सेठी तथा ओ० पी० गुप्ता
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—सितम्बर 13, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र का उद्देश्य बेसेल तथा हाइपरज्यामितीय फलनों वाले द्वैत श्रेणी समीकरणों के गुणांक A_r निश्चित करना है।

Abstract

On dual series equations. *By* P. L Sethi and O. P. Gupta, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

The present paper considers the determination of coefficients A_r in the dual series equations involving Bessel and hypergeometric functions.

सक्सेना [3] तथा एर्डेल्यी [1] द्वारा दिये गये भिन्नात्मक समाकलन संकारकों के सम्प्रयोग से दिये हुये द्वैत श्रेणी समीकरण उसी बेसेल फलन वाले समीकरणों में रूपान्तरित हो जाते हैं। अन्त में अज्ञात गुणांकों A_r को बेसेल फलनों के लाम्बिक गुण को व्यवहृत करके ज्ञात किया जाता है। यह हल सर्वथा नवीन प्रतीत होगा और विश्लेषण विशुद्ध रूप से विधिवत है।

यहां जिन द्वैत श्रेणी समीकरणों की विवेचना की जायेगी वे निम्नवत् हैं :

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r\, {}_2F_1\left[\begin{matrix} -n, \nu+r+\mu+n+1; & \frac{x^2}{z^2} \\ \nu+r+1; & \end{matrix}\right] J_{\nu+r}(x) = f(x),\ 0<x<1, \tag{1.1}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r\, {}_2F_1\left[\begin{matrix} -n, \nu+5n+r+3; & \frac{z^2}{x^2} \\ \mu+2n+r+\nu+2; & \end{matrix}\right] J_{\nu+6n+r+1}(x) = g(x),\ x>1, \tag{1.2}$$

जहाँ $J_\nu(x)$ सामान्य बेसेल फलन है, जिसकी कोटि ν है, $f(x)$ तथा $g(x)$ ज्ञात फलन हैं और A_r एक अज्ञात गुणांक है।

2. **संकारकों का खंडशः समाकलन** : इस विश्लेषण में निम्नांकित परिणामों का प्रयोग किया गया है :

सक्सेना [3, p. 228] ने भिन्नात्मक समाकलन के लिये निम्नांकित संकारकों का सूत्रपात किया है

$$J[f(x)]=J[\alpha, \beta, \nu, m: f(x)]=\frac{2x^{-\nu-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha, \beta+m; \frac{t^2}{x^2}\\ \beta;\end{matrix}\right] t^{\nu} f(t)dt \tag{2.1}$$

तथा

$$R[f(x)]=R[\alpha, \beta, \delta, m: f(x)]=\frac{2x^{\delta}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^{\infty} {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha, \beta+m; \frac{x^2}{t^2}\\ \beta;\end{matrix} -\right] t^{-\delta-1} f(t)dt \tag{2.2}$$

बशर्ते कि $Re(1-\alpha)>m$, $Re(\nu)>-1/q$, $Re(\delta)>-1\, q$, $1/p+1/p=1$,

$\beta\neq 0, -1, -2, \ldots\ldots, m=0, 1, 2, \ldots$ तथा $f(x) \in L_p(0, \infty)$.

एर्डेल्यी [1, p. 220] ने निम्नांकित संकारक प्रचलित किये हैं ।

$$J^*[\alpha, \beta: \mu: w(x)]=\frac{\mu}{\Gamma(\alpha)} x^{-\mu\alpha+\mu-\beta-1}\int_0^x (x^{\mu}-v^{\mu})^{\alpha-1} v^{\beta} w(v)dv \tag{2.3}$$

$$R^*[\alpha, \beta; \mu; w(x)=\frac{\mu}{\Gamma(\alpha)} x^{\beta}\int_x^{\infty} (v^{\mu}-x^{\mu})^{\alpha-1} v^{-\beta-\mu\alpha+\mu-1} w(v)dv, \tag{2.4}$$

बशर्ते कि $w(x) \in L_p(0, \infty)$, $p>1$, $\alpha>0$, $\beta>(1-p)/p$ तथा $\mu>0$.

सोनाइन के प्रथम सूत्र का सार्वीकरण ट्रैंटर [4, p. 97] ने दिया है जो इस प्रकार है :

$$J_{\nu+\mu+2n+r+1}(z)=\frac{2^{-\mu} z^{-\nu-\mu-r-1}\,\Gamma(\nu+r+n+1)}{\Gamma(\nu+r+1)\,\Gamma(\mu+n+1)}\int_0^z J_{\nu+r}(x) \tag{2.5}$$

$$x^{\nu+1}(z^2-x^2)^{\mu}\, {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n, \mu+r+\nu+n+1; \frac{x^2}{z^2}\\ r+\nu+1;\end{matrix}\right]dx,$$

जहाँ $R(\mu+1)>0$, $R(r+\nu+1)>0$ और $n=0, 1, 2, \ldots\ldots$,

जिसे निम्न प्रकार से व्यंजित किया जा सकता है :

$$J\left[\frac{J_{\nu+r}(x)}{(z^2-x^2)^{-\mu}}\right]=\left[-n, \nu+r+1, \nu+r+1, \mu: \frac{J_{\nu+r}(x)}{(z^2-x^2)^{-\mu}}\right] \tag{2.6}$$

$$=\frac{z^{\mu-1}\, 2^{\mu+1}\,\Gamma(\nu+r+1)\,\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\nu+r+n+1)} J_{\nu+\mu+2n+r+1}(z).$$

सोनाइन के द्वितीय सूत्र का सार्वीकरण

$$J_{\mu+\nu+r+2n+1}(z)=\frac{2^{\mu-2n+1}\,z^{\nu+\mu+r+2n+1}\,(\mu+\nu+3n+r+2)}{\Gamma(3n-\mu)\,\Gamma(\mu+\nu+2n+r+2)}\int_z^{\infty} x^{-\nu-r-4n} \tag{2.7}$$

$$\times(x^2-z^2)^{2n-\mu-1}\,J_{\nu+6n+r+1}(x)\;{}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ \nu+5n+r+3;\\ \mu+2n+r+\nu+2;\end{matrix}\ \frac{z^2}{x^2}\right]dx$$

बशर्ते कि $n=0,\ 1,\ \ldots,\ z>0,\ R(\mu+\nu+2n+r+5/2)>(2n-\mu)>0,$

इसे और भी आगे व्यक्त किया जा सकता है :

$$R\left[\frac{J_{\nu+6n+r+1}(x)}{(x^2-z^2)^{\mu-2n+1}}\right]=R\left[-n,\ \mu+2n+r+\nu+2,\ \nu+r+4n-1,\ 1+3n-\mu;\ \frac{J_{\nu+6n+r+1}(x)}{(x^2-z^2)^{\mu-2n+1}}\right] \tag{2.8}$$

$$=\frac{\Gamma(3n-\mu)\,\Gamma(\mu+\nu+2n+r+2)}{2^{\mu-2n}\,z^{\mu+2-2n}\,\Gamma(\mu+\nu+3n+r+2)\,\Gamma(1+n)}\,J_{\mu+\nu+2n+r+1}(z).$$

बेसेल फलनों की [3, p. 291] लाम्बिकता

$$\int_0^{\infty} z^{-1}\,J_{\nu+2r+1}(z)\,J_{\nu+2m+1}(z)\,dz=0;\ m\neq r, \tag{2.9}$$

$$=(4r+2\nu+2)^{-1};m=r$$

द्वारा दी जाती है बशर्ते कि $Re(\nu+r+m)>-1.$

3. **समीकरणों का हल:** (2.6) तथा (2.8) में परिभाषित संकारकों को (1.1) तथा (1·2) में सम्प्रयुक्त करने तथा (2.3) और (2.4) का भी उपयोग करने पर

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r\,J_{\nu+r+\mu+2n+1}(z)=\frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\nu+r+n+1)}{(2z)^{\mu+1}\,\Gamma(\nu+r+1)\,\Gamma(n+\mu+1)}\times$$

$$J^*[\mu+1,\ \nu+r+1,\ 2:f(x)]\ 0<x\leqslant 1$$

$$=\left(\frac{2}{z}\right)^{\mu-2n}\frac{\Gamma(2n-\mu)\,\Gamma(\mu+\nu+3n+r+2)}{\Gamma(3n-\mu)\,\Gamma(\mu+\nu+2n+r+2)}\,R^*[2n-\mu,\ \nu+r+2\mu+1,2:g(z)]\ x>1.$$

आगे भी (2.9) को व्यवहृत करने पर विधिवत हल निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$A_r=(4n+2\nu+2\mu+2r+2)\,\frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\nu+r+n+1)}{2^{\mu+1}\,\Gamma(\nu+r+1)\,\Gamma(n+\mu+1)} \tag{3.2}$$

$$\times \int_0^1 z^{-\mu-2} J_{\nu+r+2n+\mu+1}(z)\, \chi_1(z) dz$$

$$+ \frac{2^{\mu-2n}\, \Gamma(2n-\mu)\, \Gamma(\mu+\nu+3n+r+2)}{\Gamma(3n-\mu\;\; \Gamma(\mu+\nu+2n+r+2)}$$

$$\times \int_1^\infty z^{2n-\mu-1} J_{\nu+r+2n+\mu+1}(z)\, \chi_2(z)\, dz$$

जहाँ

$$\chi_1(z) = J^*[\mu+1,\, \nu+r+1,\, 2 : f(z)] \tag{3.3}$$

$$\chi_2(z) = R^*[2n-\mu,\, \nu+r+2\mu+1,\, 2 : g(z)]. \tag{3.4}$$

4. **विशिष्ट दशा :** $n=0$ के लिये श्रेणी (4.1) तथा (4.2)

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r\, J_{\nu+r+1}(x) = g(x), 0 < x < 1 \tag{4.1}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r\, J_{\nu+r+1}(x) = g(x),\; x > 1 \tag{4.2}$$

का विधिवत हल निम्न रूप में दिया जाता है

$$A_r = (\nu+r+1) \int_0^1 z^{-2}\, z_{\nu+r+1}(z)\;\; \chi_1^*(z) dz$$

$$+ (2\nu+2r+2) \int_1^\infty z^{-1} J_{\nu+r+1}(z) \chi_2^*(z) dz$$

यहाँ $\chi_1^*(z)$ तथा $\chi_2^*(z)$ समीकरण (3.3) तथा (3.4) द्वारा दिया जाता है यदि $n=0$

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Torino Rend. Sem. Mat. 1950-51, 10, 217-234.
2. ल्यूक, वाई० एल०, Integrals of Bessel Functions, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1962.
3. सक्सेना, आर० के०, Math. Z., 1967, **96**, 228-231.
4. ट्रैंटर, सी० जे०, Proc. Glasgow Math. Assoc. 1963, **6**, 97.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 1, January, 1976, Pages 87-91

लागेर श्रेणी की | N, p_n |-संकलनीयता का स्थानीय गुण

टीकम सिंह
शासकीय अभियांत्रिक महाविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—अक्टूबर, 22, 1975]

सारांश

हाल ही में चौधरी ने बिन्दु $x=0$ पर लागेर श्रेणी की नारलुंड परम संकलनीयता के स्थानीय गुण पर एक प्रमेय सिद्ध किया है। प्रस्तुत लेख में उसी प्रमेय को अधिक व्यापक परिकल्पनाओं में प्रतिपादित किया गया है।

Abstract

On local property of | N, p_n | -summability of Laguerre series. *By* Tikam Singh, Government Engineering College, Ujjain.

Very recently, Choudhary established a theorem on local property of absolute Nörlund summability of Laguerre series at the point $x=0$. In this paper the same result is proved under more delicate assumptions.

माना कि Σa_n एक अनंत श्रेणी है जिसके आंशिक योगों का अनुक्रम $\{s_n\}$ है। श्रेणी को परम संकलनीय (N, p_n) या संकलनीय | N, p_n | कहा जाता है, यदि अनुक्रम $\{t_n\}$ परिसीमित विचरण का हो, जहाँ कि

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} P_{n-m}\, s_m, \quad (P_n \neq 0),$$

और

$$P_n = \sum_{m=0}^{n} p_m, \quad P_{-1} = p_{-1} = 0.$$

नारलुंड संकलनीयता की दो विशिष्ट स्थितियां होती हैं[4] : हारमोनिक संकलनीयता, जबकि $p_n = \frac{1}{n+1}$, जिससे कि $p_n \sim \log n,\ n \to \infty$; और चिज़ारो संकलनीयता जबकि $p_n = \binom{n+\delta-1}{\delta-1}$, $\delta > 0$.

फलन $f(x) \in L(0, \infty)$ से सम्बन्धित लागेर श्रेणी निम्नलिखित है :

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(x), \tag{1·1}$$

जहाँ कि

$$\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n} a_n = \int_0^\infty e^{-y}\, y^\alpha f(y)\; L_n^{(\alpha)}(y)\, dy \tag{1·2}$$

और $L_n^{(\alpha)}(x)$, $\alpha > -1$, एक n-वाँ लागेर बहुपद है ।

2. हाल ही में चौधरी[1] ने निम्नांकित प्रमेय सिद्ध किया है :

प्रमेय : यदि एक अनृणात्मक (non-negative) एकदिष्ट (monotonic) अविस्तीर्णमान (non-increasing) अनुक्रम $\{p_n\}$ इस प्रकार है कि

$$\Sigma \frac{n^{\alpha/2+1/4}}{p_n} < \infty, \tag{2·1}$$

तब श्रेणी (1·1) की $|N, p_n|$-संकलनीयता बिन्दु $x=0$ के लघु सामीप्य में फलन $f(x)$ के व्यवहार पर निर्भर करती है, जहाँ $\alpha > -1$, और

$$\int_\eta^\infty e^{-y/2}\, y^{\alpha-1/12}\, |f(y)|\, dy < \infty \tag{2·2}$$

प्रस्तुत शोध पत्र में हम अनुक्रम $\{p_n\}$ के स्थान पर अधिक व्यापक अनुक्रम और परिकल्पना (2·2) के स्थान पर अधिक व्यापक परिकल्पनाओं (2·3) एवं (2·4) का प्रयोग करते हैं । ये परिकल्पनाएं इस तथ्य पर आधारित हैं कि भिन्न अंतरालों में लागेर बहुपदी के आचरण भी भिन्न होते हैं । हम निम्नांकित प्रमेय सिद्ध करते हैं ।

प्रमेय :

माना कि $\{p_n\}$ एक परिसीमित एकदिष्ट अनुक्रम है जो (2·1) को संतुष्ट करता है, तब श्रेणी (1·1) की $|N, p_n|$ संकलनीयता बिन्दु $x=0$ के लघु सामीप्य में फलन $f(x)$ के आचरण पर निर्भर करती है, जहाँ $\alpha > -1$,

$$\int_\omega^n e^{-y/2}\, y^{\alpha/2-3/4}\, |f(y)|\, dy < \infty, \tag{2·3}$$

ω एक नियत धनात्मक अचर है, और

$$\int_n^{\infty} e^{-y/2}\, y^{\alpha/2-7/12}\, |f(y)|\, dy<\infty,\ n\to\infty. \qquad (2\cdot4)$$

3. हमें निम्नलिखित परिणामों की आवश्यकता होगी ।

उपप्रमेय 1 : ([2], 175) माना कि α स्वेच्छ वास्तविक संख्या है तथा c एवं ω धनात्मक नियत अचर है और यदि $n\to\infty$, तब

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\begin{bmatrix} x^{-\alpha/2-1/4}\, 0(n^{\alpha/2-1/4}), & c/n\leqslant x\leqslant w; \\ 0(n^{\alpha}), & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{c}{n}\ . \end{bmatrix} \qquad (3\cdot1)$$

उपप्रमेय 2 : ([2], 238) यदि α और λ स्वेच्छ तथा वास्तविक संख्याएं हैं $w>0$ और $0<\eta<4$, $n\to\infty$, तब

$$\max e^{-x/2}\, x^{\lambda} \left| L_n^{(\infty)}(x)\right| \sim n^{Q}, \qquad (3\cdot2)$$

जहाँ कि
$$Q=\begin{cases}\max\, (\lambda-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}),\ w\leqslant x\leqslant(4-\eta)\, n; \\ \max\, (\lambda-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}),\ x\geqslant w.\end{cases} \qquad (3\cdot3)$$

उपप्रमेय 3 : माना कि $s_n=\sum_{m=0}^{n} a_m$. यदि $\{p_n\}$ परिसीमित एकदिष्ट अनुक्रम इस प्रकार है कि

$$\Sigma\frac{|s_n|}{p_n}<\infty,$$

तब श्रेणी $\Sigma\, a_n$ संकलनीय $|N\ p_n|$ होगी ।

यह उपप्रमेय भट्ट[3] के एक परिणाम की तरह ही सिद्ध किया जा सकता है ।

4. **प्रमेय की उपपत्ति** : हमें ज्ञात है कि (देखिये ([2], पृ० 269)

$$s_n(0)=\{\Gamma(\alpha+1)\}^{-1} \int_0^{\infty} e^{-y}\, y^{\alpha} f(y)\, L_n^{(\alpha+1)}(y)\, dy$$

$$=\{\Gamma(\alpha+1)\}^{-1}\left(\int_0^{\eta}+\int_{\eta}^{\infty}\right) e^{-y}\, y^{\alpha} f(y)\, L_n^{(\alpha+1)}(y)\, dy$$

$$=s_{n\cdot1}+s_{n\cdot2}\ (\text{ माना कि }),$$

η कितना ही छोटा एक धनात्मक अचर है ।

अनुक्रम $\{s_n(0)\}$ संकलनीय $|N, p_n|$ होगा, यदि प्रत्येक अनुक्रम $\{s_{n\cdot1}\}$ एवं $\{s_{n\cdot2}\}$ संकलनीय $|N, p_n|$ हो । लेकिन अनुक्रम $\{s_{n\cdot1}\}$ की $|N, p_n|$-संकलनीयता बिन्दु $x=0$ पर फलन $f(x)$ के आचरण

पर निर्भर करती है। अतः प्रमेय सिद्ध करने के लिए हम सिद्ध करें कि अनुक्रम $\{s_{n\cdot 2}\}$ संकलनीय $|N, p_n|$ है। उपप्रमेय 3 से यह सिद्ध हो जायेगा, यदि हम सिद्ध करें कि

$$\Sigma \frac{|s_{n\cdot 2}|}{p_n} < \infty.$$

माना कि

$$s_{n\cdot 2} = \int_\eta^\omega + \int_\omega^n + \int_n^\infty$$
$$= I_1 + I_2 + I_3$$

ω एक नियत धनात्मक अचर है।

(3·1) में α के स्थान पर $\alpha+1$ रखने पर

$$I_1 = O(1) \int_\eta^\omega e^{-y} y^\alpha \left| L_n^{(\alpha+1)}(y) \right| |f(y)| dx$$
$$= O(n^{\alpha/2+1/4}) \int_\eta^\omega e^{-y} y^\alpha |f(y)| dy$$
$$= O(n^{\alpha/2+1/4}),$$ क्योंकि $e^{-y} y^\alpha f(y)$ लेबेग समाकलनीय है

(3·3) और (3·2) में $\lambda - \frac{1}{2} = \frac{\alpha+1}{2} - \frac{1}{4}$, या $\lambda = \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}$ रखने से

एवं (2·3) का प्रयोग करने से

$$I_2 = O(n^{\alpha/2+1/4}) \int_\alpha^n e^{-y/2} y^{\alpha/2-3/4} |f(y)| dy$$
$$= O(n^{\alpha/2+1/4}).$$

फिर चूंकि $\lambda - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}$, अर्थात् $\lambda - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{12}$, जिससे कि

$$I_3 = O(n^{\alpha/2+5/12}) \int_n^\infty e^{-y/2} y^{\alpha/2-3/4} |f(y)| dy$$
$$= O(n^{\alpha/2+1/4}) \int_n^\infty e^{-y/2} y^{\alpha/2-7/12} |f(y)| dy$$
$$= O(n^{\alpha/2+1/4}),$$ परिकल्पना (2·4) से

अतः

$$\Sigma \frac{|s_{n\cdot 2}|}{p_n} = O(1) \; \Sigma \frac{n^{\alpha/2+1/4}}{p_n}$$
$$= O(1),$$ परिकल्पना (2·1) से

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० घनश्याम पाण्डे का अत्यंत आभारी है जिन्होंने शोध पत्र लिखने का प्रोत्साहन दिया।

निर्देश

1. चौधरी, आर० एस०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1975, **18**, 89.
2. झेगो, जी०, Orthogonal Polynomials, 1959.
3. भट्ट, एस० एन०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइं० इंडिया**, 1962, **28**, 787.
4. हार्डी, जी० एच०, Divergent series, 1949.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 1, January, 1976, Pages 93-96

माइजर के G-फलन के लिये कुछ न्यूमान प्रसार

फतेहसिंह तथा बी० एम० श्रीवास्तव
गणित विभाग, राजकीय विज्ञान महाविद्यालय, रीवाँ

[प्राप्त—नवम्बर 26, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में न्यूमान श्रेणी के रूप में माइजर के G-फलन के लिये कुछ प्रसार सूत्रों की विवेचना की गई है। प्राप्त प्रसारों से कई ज्ञात फल मिलते हैं।

Abstract

Some Neumann expansions for Meijers G-function. *By* F. Singh and B. M. Shrivastava, Department of Mathematics, Government Engineering College, Rewa, and Department of Mathemetics, Government Science College, Rewa.

In this paper authors have discussed certain expansion formulae for Meijer's G-function, in 'the terms of Neumann series. It is interesting to note that the expansions obtained in this paper have the advantage of being reducible to many results hither-to known.

1. G-फलन को अवशेषों के योग फल [2, p. 208 (5)].

$$G_{p,q}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right]=\sum_{h=1}^{m}\frac{\prod_{j=1}^{m1}\Gamma(b_j-a_h)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+b_h)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+b_h)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-b_h)}x^{b_h} \tag{1·1}$$

$$\times\,{}_pF_{q-1}\left[\begin{matrix}1+b_h-a_1,\ldots,1+b_h-a_p\\ 1+b_h-b_1,\ldots,*,\ldots,1+b_h-b_q\end{matrix};(-1)^{p-m-n}x\right],$$

के रूप में व्यक्त किया गया है जहाँ $p<q$ अथवा $p=q$ और $|x|<1$ इनमें से किन्हीं दो $(j=1, 2, \ldots, m)$ में एक पूर्णांक का भी अन्तर नहीं है। π' में डैश सूचित करता है कि गुणक $\Gamma(a_r-a_r)$ छोड़ दिया गया है। F में तारांकन से प्राचल a_r-a_r+1 के छूटने की सूचना मिलती है।

2. λ के समस्त मानों के लिये, जिनमें ऋण पूर्णांक तथा शून्य अपवाद हैं, प्रसार

$$\left(\frac{z}{4}\right)^{\lambda} G_{p,q}^{m,n}\left[xz\left|\begin{matrix}a_1, \ldots, a_p\\ b_1, \ldots, b_q\end{matrix}\right.\right]=\sum_{h=1}^{m} A(h)\, 2^{2b_h} e^{z/2}\frac{\Gamma(\lambda+b_h)}{\Gamma(2\lambda+2b_h)}$$

$$\times\sum_{v=0}^{\infty}(-1)^u\frac{(\lambda+b_h+u)\Gamma(2\lambda+2b_h+u)}{u!} I_{\lambda+b_h+u}$$

$$\times\left(\frac{z}{2}\right)\, {}_{p+2}F_q\left[\begin{matrix}-u, 2\lambda+2b_h+u, 1+b_h-a_1, \ldots, 1+b_h-a_p\\ \lambda+b_h+\frac{1}{2}, 1+b_h-b_1, \ldots, *, \ldots, 1+b_h-b_q\end{matrix}; (-1)^{p-m-n}x\right], \qquad (2{\cdot}1)$$

और $p<q$ अथवा $p=q$ तथा $|xz|<1$;

$$A(h)=\frac{\prod_{j=1}^{m}{}' \Gamma(b_j-b_h)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+b_h)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+h_h)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-b_h)}\, x^{b_h}.$$

(2·1) को सिद्ध करने के लिये इसके वाम पक्ष के G-फलन को (1·1) में दिये गये अवशेषों के योगफल के रूप में व्यक्त करते हैं और ज्ञात सूत्र [3, p. 98].

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda}=\Gamma(\lambda)\, e^{-yz}\sum_{u=0}^{\infty}(\lambda+u)\, C_u^{\lambda}(y)\, I_{\lambda+u}(z)$$

जब $y=-1$ को प्रतिस्थापित करते हैं और एक ही बेसेल फलन वाले पदों को एकत्र करते हैं।

ऐसे ही ज्ञात सूत्रों [7, p. 138, (1) तथा p. 151, (1)] से सार्वीकृत न्यूमान प्रसार

$$z^{\lambda} G_{p,q}^{m,n}\left[x^2z^2\left|\begin{matrix}a_1, \ldots, a_p\\ b_1, \ldots, b_q\end{matrix}\right.\right]=\sum_{h=1}^{m} A(h)x^{b_h}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{(\lambda+2b_h+2u)\Gamma(\lambda+2b_h+u)}{u!}$$

$$\times J_{\lambda+2b_h+2u}(2z)\, {}_{p+2}F_{q-1}\left[\begin{matrix}-u, \lambda+2b_h+u, 1+b_h-a_1, \ldots, 1+b_h-a_p\\ 1+b_h-b_u, \ldots, *, \ldots, 1+b_h-b_q\end{matrix}; (-1)^{p-m-n+1}x^2\right]$$

(2·2)

तथा $$\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+\mu} G_{p,q}^{m,n}\left[x^2z^2\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right]=\sum_{h=1}^{m}A(h)(4x)^{b_h}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\lambda+2b_h)\Gamma(1+\mu+b_h)}{(\lambda+\mu+2a_h)}$$

$$\times\sum_{u=0}^{\infty}\frac{(\lambda+\mu+2b_h+2u)(\lambda+\mu+2b_h)_u}{u!}J_{\lambda+b_h+u}(z)J_{\mu+b_h+u}(z)$$

$$\times{}_{p+4}F_{q+1}\left[\begin{matrix}-u,\ 1+\lambda+b_h,\ 1+\mu+b_h,\ \lambda+\mu+2\mu b_h+u,\ 1+b_h-a_1,\ \ldots,\ 1+b_h-a_p,\\ \tfrac{1}{2}(1+\lambda+\mu+2b_h),\ \tfrac{1}{2}(2+\lambda+\mu+2b_h),\ 1+b_h-b_1,\ \ldots,\ *,\ \ldots,\ 1+b_h-b_q\end{matrix};(-1)^{p-m-n+1}x^2\right]\quad(2\cdot3)$$

क्रमश: प्राप्त होते हैं। सूत्र (2.2) तथा (2.3) तभी विद्यमान होगें जब $p<q$ या $p=q$ तथा $|x^2z^2|<1$ तथा λ और μ से समस्त मानों के लिये जिनमें ऋण पूर्णांक तथा शून्य अपवाद हैं।

3. विशिष्ट दशायें

इस अनुभाग में यह दिखलाया जावेगा कि किस प्रकार साहित्य में विकीर्ण अनेक ज्ञात फल अनुभाग 2 में स्थापित फलों की विशिष्ट दशा के रूप में पाये जाते हैं।

(i) जब $m=1$, $n=p$, $b_1=0$, q को $q+1$ द्वारा a_j को $1-a_j$ ($j=1, 2, \ldots, p$), द्वारा b_j को $1-b$ ($j=2, 3, \ldots, q+1$) द्वारा, x को $-x$ द्वारा प्रतिस्थापित करते हैं और गुण [2, p. 215. (1)] का सम्प्रयोग करते हैं तो सूत्र (2 1) से फल [5, p. 895] प्राप्त होता है जो $p=q=1$, होने पर स्लेटर [6, p. 628] द्वारा दिये गये सुविख्यात सूत्र को सन्निविष्ट करता है।

(ii) ऊपर (i) में दी गई विधि से अग्रसर होने पर (2·2) तथा (2·3) से हमें क्रमश: निम्नांकित दो प्रसार प्राप्त हो सकते हैं।

$$\lambda^z\,{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix};-x^2z^2\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda+2u)\Gamma(\lambda+u)}{u!}J_{\lambda+2u}(2z)\times{}_{p+2}F_q\left[\begin{matrix}-u,\ \lambda+u,\ a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix};x^2\right]\quad(3\cdot1)$$

तथा $$\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+\mu}{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix};-x^2z^2\right]=\frac{\Gamma(1+\lambda)\Gamma(1+\mu)}{(\lambda+\mu)}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{(\lambda+\mu+2u)(\lambda+\mu)_u}{u!}$$

$$\times J_{\lambda+u}(z)J_{\mu+u}(z)\,{}_{p+4}F_{q+2}\left[\begin{matrix}-u,\ 1+\lambda,\ 1+\mu,\ \lambda+\mu+u,\ a_1,\ldots,a_p\\ \tfrac{1}{2}(1+\lambda+\mu),\ \tfrac{1}{2}(2+\lambda+\mu),\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix};x^2\right]\quad(3\cdot2)$$

जहाँ $p \leqslant q$ या $p=q+1$ तथा $|x^2 z^2|<1$.

अब बेसेल बहुपदों

$$M_n^{(\alpha)}(y)={}_2F_0(-n, 1+\alpha+n; -; y/2)$$

की परिभाषा से हमें

$$M_n^{(\alpha)}(y)M_n^{(\alpha)}(-y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(1+\alpha+n)_k}{k!}(y/2)^k\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-k, -n, 1+\alpha+n\\ 1+n-k, -\alpha-k-n\end{matrix}; 1\right]:$$

प्राप्त होता हैं और डिक्सन के प्रमेय [2, p. 189 (5)] से सन्तुलित अन्तिम ${}_3F_2$ का योगफल निकालने पर हम पाते हैं कि

$$M_n^{(\alpha)}(y)M_n^{(\alpha)}(-y)={}_4F_1\left[\begin{matrix}-n, 1+\alpha+n, \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, 1+\frac{\alpha}{2}\\ 1+\alpha\end{matrix}; y^2\right].$$

(3·2) की विशिष्ट दशा $p=q+1=4, \lambda+\mu=1+\alpha$ से सलाम तथा कार्लिट्ज [1, p. 157] द्वारा दिया गया एक ज्ञात सूत्र प्राप्त होता है।

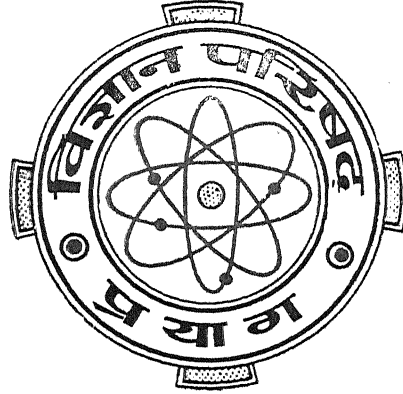
यदि हम $p=0, q=1, b_1=1+\nu$, लें, ${}_0F_1$ को बेसेल फलन के रूप में व्यक्त करें तो (3·2) से ऐसा फल मिलता है जो[1] में प्राप्त किया गया है और जो कार्लिट्ज के फल [4, p. 136] के संगत है।

पुनश्च $p=q-1=2$, $a_1=\frac{1}{2}(1+\lambda+\mu)$, $a_1=\frac{1}{2}(2+\lambda+\mu)$, $b_1=1+\lambda$, $b_2=1+\mu$, $b_3=1+\lambda+\mu$ के लिये दाहिने पक्ष में ${}_3F_1$ को जैकोबी बहुपद के रूप में व्यक्त करने पर फल (3·2) से कार्लिट्ज का एक परिणाम [4, p. 133] मिलता है।

निर्देश

1. अल-सलाम, डब्लू० ए० तथा कार्लिट्ज, एल०, Portugaliae Mathematica, 1963, **22**, 153-160
2. बेटमैन प्रोजेक्ट, Higher Transcendental Functions, **भाग I मैकग्राहिल**, 1953
3. वही, Higher Transcendental functions, **भाग II मैकग्राहिल**, 1953
4. कार्लिट्ज, एल०, **क्वार्टली जर्न० मैथ० (आक्सफोर्ड)**, 1962, **13**, 134-36
5. श्रीवास्तव, एच० एम०, **प्रोसी० कैम्ब्रि० फिला० सोसा०**, 1965, **61**, 895-96
6. स्लेटर, एल० जे०, **वही**, 1954, **50**, 628-31
7. वाट्सन जी० एन०, A Treatise on the Theory of Bessel functions, **कैम्ब्रिज**, 1966

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 19, No 2, April, 1976, Pages 97-103

दो चरों वाले सार्वीकृत फलन सम्बन्धी कुछ फल

वी० बी० एल० चौरसिया
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरी कालेज, जयपुर

[प्राप्त—मई 20, 1975]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य दो चरों वाले एक सार्वीकृत फलन के कतिपय समाकल का मान ज्ञात करना और इन्हें इस फलन के लिये कतिपय प्रसार सूत्रों की स्थापना के लिये प्रयुक्त करना है।

Abstract

Some results involving a generalised function of two variables. *By* V. B. L. Chaurasia, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur.

In this paper we evaluate some integrals involving a generalised function of two variables and employ these to establish some expansion formulae for this function.

1. भूमिका

इस प्रपत्र में दो चरों वाले सार्वीकृत फलन को निम्नांकित द्विगुण मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकलों (मित्तल तथा गुप्ता 1972) के द्वारा परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जाता है :

$$H(x, y) = H\left[\begin{array}{c|c|c} O, N & (a_P; A_P, E_P) & \\ P, Q & (b_Q; B_Q, F_Q) & x \\ m, n & (c_p, C_p) & \\ p, q & (d_q, D_q) & y \\ m', n' & (e_{p'}, \alpha_{p'}) & \\ p', q' & (f_{q'}, \beta_{q'}) & \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s, t) \, . \, \theta_1(s) \, . \, \theta_2(t) \, . \, x^s \, y^t \, ds \, dt \tag{1·1}$$

जहाँ
$$\phi(s, t)=\frac{\prod_{i=1}^{N}\Gamma(1-a_i+A_is+E_it)}{\prod_{i=N+1}^{P}\Gamma(a_i-A_is-E_it)\prod_{i=1}^{Q}\Gamma(1-b_i+B_is+F_it)}$$

$$\theta_1(s)=\frac{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(d_i-D_is)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1-c_i+C_is)}{\prod_{i=m+1}^{q}\Gamma(1-d_i+D_is)\prod_{i=n+1}^{p}\Gamma(c_i-C_it)}$$

$$\theta_2(t)=\frac{\prod_{i=1}^{m'}\Gamma(f_i-\beta_it)\prod_{i=1}^{n'}\Gamma(1-e_i+\alpha_it)}{\prod_{i=m'+1}^{q}\Gamma(1-f_i+\beta_it)\prod_{i=n'+1}^{p'}\Gamma(e_i-\alpha_it)}$$

x तथा y शून्य के बराबर नहीं है और रिक्त गुणफल एक माना जाता है।

अनृण पूर्णांक $N, P, Q, m, n, p, q, m', n', p'$ और q' ऐसे हैं कि $0\leqslant N\leqslant P$, $0\leqslant n\leqslant p$, $0\leqslant n'\leqslant p'$, $Q\geqslant 0$, $0\leqslant m\leqslant q$, $0\leqslant m'\leqslant q'$ तथा α, β और A, B, E, F, C, D ये सभी अक्षर धनात्मक हैं।

कंटूर L_1 तथा L_2 उपयुक्त ढंग से परिभाषित हैं तथा समाकल्य के सभी पोल सरल माने गये हैं।

वे प्रतिबन्ध जिनके अन्तर्गत फलन $H(x, y)$ वैश्लेषिक फलन को दर्शाता है तथा (1·1) में समाकल अभिसारी होता है मित्तल तथा गुप्ता (1972 p. 119 प्रतिबन्ध (i) से (vi) तक) द्वारा दिये गये हैं। इस शोध पत्र में लगातार यह मान लिया गया है कि दो चरों वाले सार्वीकृत फलन द्वारा ये समस्त प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।

हम निम्नांकित संकेतन

$$H\left[\begin{array}{c|c|c} o, n & (a_p; A_p, E_p) & \\ p, q & (b_q; B_q, F_q) & x \\ \cdots & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \end{array}\right]$$

का प्रयोग यह दिखाने के लिये करेंगे कि ... द्वारा प्रदर्शित प्राचल वे ही हैं जो (1·1) में $H(x, y)$ के हैं।

आगे (a_p, A_p, E_p) द्वारा अनुक्रम $(a_1, A_1, E_1)\ldots(a_p, A_p, E_p)$ तथा (c_q, C_q) द्वारा अनुक्रम $(c_1, C_1)\ldots(c_q, C_q)$ को व्यक्त किया गया है।

(1·1) की विशिष्ट दशायें

(i) यदि हम (1·1) में समस्त $\alpha, \beta, A, B, C, D, E,$ तथा F को इकाई के तुल्य मान लें तो $H(x, y)$ अग्रवाल (1965) द्वारा प्राप्त दो चरों वाले G-फलन में समानीत हो जाता है। (1·1) में प्राचलों के और अधिक विशिष्टीकरण से ऐपेल के फलन F_1, F_2, F_3, F_4 तथा कैम्पे द फेरी फलन $F(x, y)$ को विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किया जा सकता है।

(ii) (1·1) में $P=Q=0$ रखने पर $H(x, y)$ दो फाक्स के H-फलन के गुणन फल में टूट जाता है।

$$H\left[\begin{array}{c|c|c} 0,0 & \ldots & \\ 0,0 & \ldots & x \\ m,n & (c_p, C_p) & \\ p,q & (d_q, D_q) & y \\ m',n' & (e_{p'}, \alpha_{p'}) & \\ p',q' & (f_{q'}, \beta_{q'}) & \end{array}\right] = H^{m,n}_{p,q}\left[x \,\middle|\, \begin{array}{c} (c_p, C_p) \\ (d_q, D_q) \end{array}\right] H^{m',n'}_{p',q'}\left[y \,\middle|\, \begin{array}{c} (e_{p'}, \alpha_{p'}) \\ (f_{q'}, \beta_{q'}) \end{array}\right] \tag{1·2}$$

(iii) $m'=q'=\beta_1=1, f_1=n'=p'=N=P=Q=0,$ रखने से (1·1) निम्नांकित में समानीत हो जाता है[2]

$$H\left[\begin{array}{c|c|c} 0,0 & \ldots & \\ 0,0 & & x \\ m,n & (c_p, C_p) & \\ p,q & (d_q, D_q) & \\ 1\;0 & \ldots & y \\ 0\;1 & (0,1) & \end{array}\right] = e^{-y} H^{m,n}_{p,q}\left[x \,\middle|\, \begin{array}{c} (c_p, C_p) \\ (d_q, D_q) \end{array}\right] \tag{1·3}$$

2. हम निम्नांकित समाकल स्थापित करेंगे:

(i) $\int_0^1 x^w (1-x)^{v-1/2} C_v^u (2x-1) H(yx^h, zy^k)\, dx$

$$= \frac{\Gamma(v+1/2)\Gamma(2v+u)}{\Gamma(2v)\, u!}$$

$$\times H\left[\begin{array}{c|c|c} 0, N+2 & (-w, h, k), (v-w-1/2, h, k), (a_p, A_p, E_p) & \\ P+2, Q+2 & (b_Q, B_Q, F_Q), (v+u-w-1/2, h, k)(-w-v-u-1/2, h, k) & y \\ \ldots & \ldots & z \\ \ldots & \ldots & \end{array}\right] \tag{2·1}$$

$R(w+h\, d_i/D_i+k\, f_j/\beta_j)>-1\ (i=1\ldots m),\ R(v)>-1/2,\ h,\ k>0$
$(j=1\ldots m')$

(ii) $\int_0^1 x^w(1-x)^{v-1/2}\, C_v^u\,(2x-1)\, H(yx^h, z)\, dx$

$$=\frac{\Gamma(v+1/2)\Gamma(2v+u)}{\Gamma(2v)\,u!}$$

$$\times H\left[\begin{array}{c|c|c} \ldots & \ldots & \\ m,\ n+2 & (-w,h)(-w-1/2+v,h)(c_p, C_p) & y \\ p+2,\ q+2 & (d_q, D_q)(v+u-w-1/2,h)(-w-u-v-1/2,\ h) & \\ \ldots & \ldots & z \\ \ldots & \ldots & \end{array}\right] \tag{2·2}$$

$R(w+h\, d_i/D_i)>-1\ i=1\ldots m;\ R(v)>-1/2,\ h>0$

उपपत्ति

(2·1) को स्थापित करने के लिये हम (2·1) के समाकल्य में पाये जाने वाले H-फलन के स्थान पर (1·1) में से द्विगुण मेलिन-बार्नीज समाकलों को प्रतिस्थापित करेंगे और आन्तरिक समाकल का मान ज्ञात सूत्र (एर्डेल्यी 1954)

$$\int_0^1 x^w\,(1-x)^{v-1/2}\ C_u^v\,(2x-1)\ dx$$

$$=\frac{\Gamma(w+1)\Gamma(v+1/2)\Gamma(2v+u)\Gamma(w-v+3/2)}{\Gamma(2v)\Gamma(w-v-u+3/2)\Gamma(w+v+u+3/2)\ u!}$$

$R(w)>1,\ R(v)>-1/2$

की सहायता से निकालेंगे और फिर प्राप्त होने वाले समाकल की विवेचना (1·1) की सहायता से करेंगे। इसी प्रकार समाकल (2·2) को भी सिद्ध किया जा सकता है।

3. प्रसार

जिन प्रसार सूत्रों की स्थापना की जानी है, वे हैं:

(i) $x^w H(yx^h, zx^h,)$

$$=\frac{2^{2v}\Gamma(v)}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=9}^{\infty}(v+r)\ H\left[\begin{array}{c|c|c} 0,\ N+2 & (-w-v+\frac{1}{2},h,k)(-w,h,k),(a_P,A_P,E_P) & \\ P+2,\ Q+2 & (b_Q,B_Q,F_Q),(r-w,\ h,k)(-w-2v-r,h,k) & y \\ \ldots & \ldots & z \\ \ldots & \ldots & \end{array}\right]$$

$$\times C_r^v\,(2x-1) \tag{3·1}$$

$R(w+hd_i/D_i+kf_j/\beta_j)>-1/2\ (i=1...m;\ j=1...m'),\ R(\nu)>0,\ h,\ k>0$

(ii) $$x^w H(yx^h, z)=\frac{2^{2\nu}\Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi}}\sum_{r=0}^{\infty}(\nu+r)$$

$$\times H\left[\begin{array}{c|c|c} \cdots & \cdots & \\ m,\ n+2 & (-w-\nu+1/2,\ h)(-w,\ h)(c_p,\ C_p) & y \\ p+2,\ q+2 & (d_q,\ D_q)(r-w,\ h)(-w-2\nu-r,\ h) & z \\ \cdots & \cdots & \end{array}\right] C_r^{\nu}(2x-1) \quad (3{\cdot}2)$$

$R(w+hd_i/D_i)>-1/2,\ (i=1...m),\ R(\nu)>0,\ h>0$

उपपत्ति

माना कि

$$f(x)=x^w H(yx^h, zx^k)=\sum_{r=0}^{\infty} T_r\ C_r^{\nu}\ (2x-1) \quad (3{\cdot}3)$$

यहाँ $C_r^{\nu}(2x-1)$ एक गेगेनबॉर बहुपद ((5)) p. 279 (15)) है। समीकरण (3·3) वैध है क्योंकि $f(x)$ संतत है और विवृत अन्तराल (0, 1) में परिबद्ध विचरण वाला है। अब (3·3) के दोनों पक्षों में $x^{\nu-1/2}(1-x)^{\nu-1/2}\ C_u^{\nu}\ (2x-1)$ से गुणा करते हैं तथा x के प्रति 0 से 1 तक समाकलित करते हैं। समाकलन तथा संकलन के क्रम को परिवर्तित करते हैं जो दाहिने पक्ष के लिये वैध है, तो

$$\int_0^1 x^{w+\nu-1/2}(1-x)^{\nu-1/2}\ C_u^{\nu}(2x-1)\ H(yx^h, zx^h)\ dx$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} T_r \int_0^1 x^{\nu-1/2}\ (1-x)^{\nu-1/2}\ C_u^{\nu}\ (2x-1)\ C_r^{\nu}\ (2x-1)\ dx \quad (3{\cdot}4)$$

गेगनबॉर बहुपद ((5) p. 281 (28))

$$\int_0^1 x^{\nu-1/2}\ (1-x)^{\nu-1/2}\left[C_u^{\nu}\ (2x-1)\right]^2 dx=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu+u)\,\Gamma(\nu+1/2)}{2^{2\nu}\ \Gamma(2\nu)\Gamma(\nu+u)\ u!}$$

जो $R(\nu)>-1/2$ के हेतु वैध है, दाहिनी ओर तथा (3·4) के बाईं ओर का परिणाम (2·1) के लिये लाम्बिक गुण का प्रयोग करने पर

$$T_u=\frac{2^{2v}\Gamma(v)(v+u)}{\sqrt{\pi}}H\left[\begin{array}{c|c|c} 0,\ N+2 & (-w-v+1/2,\ h,\ k)(-w,\ h,\ k)(a_P,\ A_P,\ E_P) & \\ P+2,\ Q+2 & (b_Q,\ B_Q,\ F_Q)(u-w,\ h,\ k)(-w-2v-u,\ h,\ k) & y \\ \cdots & \cdots & z \\ \cdots & \cdots & \end{array}\right]$$

$R(v)>0,\ R(w+hd_i/D_i+kf_j/\beta_j)>-1\ (i=1...m;\ j=1...m')$

(3·3) तथा (3·5) की सहायता से हमें प्रसार सूत्र (3·1) प्राप्त होता है।

इसी प्रकार प्रसार सूत्र (3·2) को भी सिद्ध किया जा सकता है।

4. **विशिष्ट दशायें**

(i) (2·1) में $P=Q=0$ रखने तथा (1·2) का व्यवहार करने पर

$$\int_0^1 x^w(1-x)^{v-1/2}\, C_u^v\ (2x-1)\ H_{p,\ q}^{m,\ n}\left[yz^h\left|\begin{array}{c}(c_p,\ C_p)\\ \\ (d_q,\ D_q)\end{array}\right.\right]H_{p',\ q'}^{m',\ n'}\left[zx^h\left|\begin{array}{c}(e_{p'},\ \alpha_{p'})\\ \\ (f_{q'},\ \beta_{q'})\end{array}\right.\right]dx$$

$$=\frac{\Gamma(v+1/2)\Gamma(2v+u)}{u!\ \Gamma(2v)}H\left[\begin{array}{c|c|c} 0,\ 2 & (-w,\ h,\ k)(v-w-1/2,\ h,\ k) & \\ 2,\ 2 & (v+u-w-1/2,\ h,\ k)(-w-v-u-1/2,\ h,\ k) & y \\ \cdots & \cdots & z \\ \cdots & \cdots & \end{array}\right] \quad (4·1)$$

$R(w+hd_i/D_i+kf_j/\beta_j)>-1,\ (i=1...m),\ R(v)>-1/2,\ h>0,\ k>0$
$(j=1...m')$

(ii) $$x^w H_{p,\ q}^{m,\ n}\left[yx^h\left|\begin{array}{c}(c_p,\ C_p)\\ \\ (d_q,\ D_q)\end{array}\right.\right]H_{p',\ q'}^{m',\ n'}\left[zx^k\left|\begin{array}{c}(e_{p'},\ \alpha_{p'})\\ \\ (f_{q'},\ \beta_{q'})\end{array}\right.\right]$$

$$=\frac{2^{2v}\Gamma(v)}{\sqrt{\pi}}\sum_{r=0}^{\infty}(v+r)\ H\left[\begin{array}{c|c|c} 0,\ 2 & (-w-v+1/2,\ h,\ k)(-w,\ h,\ k) & \\ 2,\ 2 & (r-w,\ h,\ k)(-w-2v-r,\ h,\ k) & y \\ \cdots & \cdots & z \\ \cdots & \cdots & \end{array}\right]C_r^v\ (2x-1) \quad (4·2)$$

$R(w+hd_i/D_i+kf_j/\beta_j)>-1/2\ (i=1...m;\ j=1..\ m'),\ R(v)>0,\ h>0.\ k>0$

(iii) $m'=q'=\beta_1=1,\ f_1=n'=p'=N=P=Q=0$ रखने तथा पहले (1·3) फिर (2·1) और (3·1) का उपयोग करने पर हमें क्रमशः प्राप्त होते हैं:

$$\int_0^1 x^w (1-x)^{v-1/2} C_u^v (2x-1) H_{p,q}^{m,n}\left[yx^h \middle| \begin{matrix} (c_p, C_p) \\ (d_q, D_q) \end{matrix} \right] dx$$

$$= \frac{\Gamma(v+1/2)\Gamma(2v+u)}{\Gamma(2v)\, u!} H_{p+2,\, q+2}^{m,\, n+2}\left[y \middle| \begin{matrix} (-w, h)(v-w-1/2, h)(c_p, C_p) \\ (d_q, D_q)(v+u-w-1/2, h)(-w-v-u-1/2, h) \end{matrix} \right] \quad (4\cdot3)$$

$R(w+hd_i/D_i)>-1, (i=1...m), R(v)>-1/2, h>0$

$$\text{(iv)}\quad x^w H_{p,q}^{m,n}\left[yx^h \middle| \begin{matrix} (c_p, C_p) \\ (d_q, D_q) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{2^{2v}\Gamma(v)}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=0}^{\infty} (v+r)\, H_{p+2,\, q+2}^{m,\, n+2}\left[y \middle| \begin{matrix} (-w-v+1/2, h)(-w, h)(c_p, C_p) \\ (d_q, D_q)(r-w, h)(-w-2v-r, h) \end{matrix} \right] C_r^v (2x-1) \quad (4\cdot4)$$

$R(w+hd_i/D_i)>-1/2, (i=1...m), R(v)>0, h>0$

(v) हमारे द्वारा स्थापित समाकलों तथा प्रसार सूत्रों की सहायता से कई ज्ञात तथा कई नये फल प्राप्त किये जा सकते है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक, प्रो० सी० वी० राठी का कृतज्ञ है जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में रुचि ली ।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० मैथ० इंस्टी० साइं० इंडिया** 1965, **31**, 536
2. चौरसिया, वी० बी० एल०, (**प्रेषित**)
3. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transform. **भाग 2, मैकग्राहिल**, 1954
4. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता सी० के०, **प्रोसी० इंडि० एके० साइंस**, 1972, **LXXV**
5. रेनविले०, ई० डी०, Special Functions, **मैकमिलन कम्पनी, न्यूयार्क**, 1965
6. शाह, एम० एल०, **इण्डि० जर्न० प्योर एण्ड ऐप्ला० मैथ०**, 1971, **2**,

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 2, April, 1976, Pages 105-116

सार्वीकृत बहु परिवर्त के समाकल निरूपणों पर कुछ प्रमेय

वाई० एन० प्रसाद तथा एस० एन० सिंह
सम्प्रयुक्त गणित अनुभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—सितम्बर 11, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में सार्वीकृत बहु-परिवर्त के समाकल निरूपणों पर तीन प्रमेयों की स्थापना की गई है और इन्हें ज्ञात फलों के प्रयोग से सिद्ध किया गया है।

Abstract

Some theorems on integral representations of generalized multiple transform. *By* Y. N. Prasad and S. N. Singh, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, B. H. U., Varanasi.

In the present paper we have established three theorems on integral representations of generalized multiple transform and proved them using the known results due to Prasad and Singh[8]. We have proved our theorems by taking various integral representations of Whittaker function $W_{k,m}(z)$ given by Meijer[4] and Whittaker and Watson[9]. These theorems are the generalizations of the theorem studied by Mukherjee[5], Prasad[6], Prasad and Siddiqui[7], etc. We have utilized the theorem in the evaluation of a complicated integral involving H-function of Fox[3].

1. विषय प्रवेश

इस प्रपत्र में हमने बहु-व्हिटेकर परिवर्त के समाकल निरूपणों के शृंखलाबद्ध गुणों की विवेचना की है जिसे निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है।

$$\phi(t)=MWT[f(x_1, x_2, \dots x_r)]$$

$$=\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} x_j^{\alpha_j-1} \left\{\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{\rho_j}\right\}^\sigma$$

$$\times \exp\left[-\tfrac{1}{2}t\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}\right] W_{k,m}\left\{t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}$$

$$\times H_{u,v}^{f,g}\left[ct\prod_{j=1}^{r}x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_1}\left|\begin{matrix}\{(c_u,\gamma_u)\}\\ \\ \{(d_v,\delta_v)\}\end{matrix}\right.\right] f(x_1, x_2, \ldots, x_r)\sum_{j=1}^{r}dx_j \quad (1\cdot1)$$

इस सम्पूर्ण प्रपत्र में MTW द्वारा बहु-व्हिटेकर परिवर्त का बोध कराया गया है। बहु-व्हिटेकर परिवर्त (1·1) के समाकल निरूपणों सम्बन्धी प्रमेयों में हम प्रसाद तथा सिंह[8] द्वारा सार्वीकृत बहु-परिवर्त के लिये नीचे दिये गये फलों का उयोग करेंगे।

$$\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\prod_{j=1}^{r}x_j^{\alpha_j-1}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma} H_{u,v}^{f,g}\left[\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_1}\left|\begin{matrix}\{(A_u,\eta_u)\}\\ \\ \{(B_v,\xi_v)\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$H_{p,q}^{m,n}\left[t\prod_{j=1}^{r}x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_2}\left|\begin{matrix}\{(c_p,\gamma_p)\}\\ \\ \{(d_q,\delta_q)\}\end{matrix}\right.\right]\prod_{j=1}^{r}dx_j$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{r}a_j^{\alpha_j}}{\prod_{j=1}^{r}p_j}\left(\frac{\lambda^{-k}}{\sigma_1}\right) H_{p+r+v,\,q+u+1}^{m+g,\,r+n+f}\left[t\prod_{j=1}^{r}a_j^{\beta_j}\lambda^{-k'}\left|\begin{matrix}\left(1-\frac{\alpha_1}{p_1},\frac{\beta_1}{p_1}\right),\ldots,\left(1-\frac{\alpha_r}{p_r},\frac{\beta_r}{p_r}\right), \{(c_n,\gamma_n)\},\{(1-B_v-K\xi_v,k'\xi_v)\},(c_{n+1},\gamma_{n+1}),\ldots,(c_p,\gamma_p),\\ \\ \{(d_m,\delta_m)\},\{(1-A_u-K\eta_u,K'\eta_u)\}, \{(d_{m+1},\delta_{m+1}),\ldots,(d_q,\delta_q),(1+\sigma-K\sigma_1,K'\sigma_1-\sigma_2)\end{matrix}\right.\right], \quad (1\cdot2)$$

जहाँ $K=\frac{1}{\sigma_1}\left(\sigma+\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j}{p_j}\right)$; $K'=\frac{1}{\sigma_1}\left(\sigma_2+\sum_{j=1}^{r}\frac{\beta_j}{p_j}\right)$; $\sigma_1, \sigma_2>0$;

$R(\alpha_j), R(\beta_j)>0, (j=1, 2,\ldots, r)$; प्रत्येक $x_j>0, (j=1, 2, \ldots, r)$;

$\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}>0$; $-\delta<R\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j}{p_j}\right)<-\beta$; $\delta=\min R(B_j/\xi_j), (j=1, 2, \ldots, f)$;

$\beta=\max R\left(\frac{A_i-1}{\eta_i}\right)(i=1,2,\ldots,g)$;

$|\arg\lambda|<\frac{1}{2}U\pi, U>0$ तथा $U=\sum_{j=1}^{f}\xi_j-\sum_{j=f+1}^{v}\xi_j+\sum_{j=1}^{g}\eta_j-\sum_{j=g+1}^{u}\eta_j.$

परिणाम (1·2) प्रसाद तथा सिंह [8] का है । इसे एडवर्ड के परिणाम [2, p. 161] से व्युत्पन्न किया गया है जो नीचे दिया हुआ है ।

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j-1} f\left\{\sum_{j=1}^{n} (x_j/a_j)^{p_j}\right\} \prod_{j=1}^{n} dx_j$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{n} a_j^{\alpha_j} \prod_{j=1}^{n} \Gamma(\alpha_j/p_j)}{\prod_{j=1}^{n} p_j\, \Gamma\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{p_j}\right)} \int_0^\infty z^{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha_j}{p_j}\right)-1} f(z)\, dz,$$

जहाँ $0<\sum_{j=1}^{n} (x_j/a_j)^{p_j}<\infty$ तथा प्रत्येक $x_j>0, (j=1, 2, \ldots, n)$.

हम $[f(x_1, x_2, \ldots, x_r)]$ का प्रयोग बहुपरिवर्त के लिये करेंगे जिसे निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है:

$$MT[f(x_1, x_2, \ldots, x_r)]=\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} x_j^{\alpha_j-1} \left\{\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma}$$

$$\times H_{n,v}^{f,g}\left[ct \prod_{j=1}^{r} x_j^{\beta_j} \left\{\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_1} \left| \begin{matrix} \{(c_u, \gamma_u)\} \\ \{(d_v, \delta_v)\} \end{matrix} \right.\right] f(x_1, x_2, \ldots, x_r) \prod_{j=1}^{r} dx_j \qquad (1\cdot3)$$

इस प्रपत्र में हमने तीन प्रमेय सिद्ध किये हैं जिनमें $W_{k,m}\left\{t \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}\right\}$ के समाकल निरूपणों के विभिन्न प्रकारों को प्रयुक्त किया है जो समाकल्य में दिखाई देता है । एक अपेक्षतया जटिल उदाहरण भी प्रस्तुत किया गया है ।

2. **प्रमेय 1.**

यदि $\phi(t)=MWT\,[f(x_1, x_2, \ldots, x_r)],$ (2·1)

तथा
$$g(t, z)=MT\left[\left\{\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{-m+1/2} \exp\left\{-t\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}\right\}\right.$$

$$\left.\times\left\{z+\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{k+m-1/2} f(x_1, x_2, \ldots, x_r)\right], \qquad (2\cdot2)$$

तो $$\phi(t)=\frac{t^{m+1/2}}{\Gamma(-k+m+\frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-tz} z^{-k+m-1/2} g(t, z)\, dz, \qquad (2\cdot3)$$

बशर्ते कि प्रत्येक $x_j>0, (j=1, 2, ..., r),\ 0<\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}<\infty$;

$R(t)>0;\ R(-k+m-\frac{1}{2})>0;\ f(x_1, x_2, ..., x_r)$ संतत है यदि $x_j>0$;

$R(\alpha_j), R(\beta_j)>0;\ \sigma, \sigma_1>0;\ |\arg ct|<\frac{1}{2}U\pi\ U>0$

तथा
$$U=\sum_{j=1}^{f} \delta_j-\sum_{j=f+1}^{v} \delta_j+\sum_{j=1}^{g} \gamma_j-\sum_{j=g+1}^{u} \gamma_j;$$

$$-\delta<R\left(\frac{\sigma+\sigma'}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j+\alpha_j'}{p_j}\right)<-\beta;\ \delta=\min R\left(\frac{\alpha_j}{\delta_j}\right), (j=1, 2, ..., f);$$

$$\beta=\max R\left(\frac{c_i-1}{\gamma_i}\right), (i=1, 2, ..., g)$$ और

$$f(x_1, x_2, ..., x_r)\begin{cases} 0\left[\prod_{j=1}^{r} x_j^{\alpha_j'}\left\{\sum_{j=1}^{r} (y_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma'}\right] \text{ बशर्ते कि } R(\alpha_j'), R(\beta_j')>0, \\ \qquad R(\sigma')>0 \text{ यदि } x_j \text{ लघु हो} \\ 0\left[e^{-\mu'\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}}\right], \text{ बशर्ते कि } R(\mu')>0 \text{ यदि } x_j \text{ दीर्घ हो} \end{cases}$$

और इस प्रकार से (2·3) में सम्भूत समाकल परम अभिसारी है ।

उपपत्तिः

$W_{k,m}(z)$ के समाकल निरूपण का उपयोग करने पर जहाँ $z=\left\{t\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}\right.$ व्हिटेकर तथा वाट्सन [9, p. 340]

$$W_{k,m}(z)=\frac{e^{-1/2z}\,z^k}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}\int_0^\infty t^{-k-1/2+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-1/2+m} e^{-t}\,dt,$$

जहाँ $R(k-\frac{1}{2}-m)\leqslant 0$ तथा कोई पूर्ण संख्या नहीं है तो हमें

$$\phi(t)=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} x_j^{\alpha_j-1}\left\{\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma}$$

$$\times\exp\left[-\tfrac{1}{2}t\left\{\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}\right\}\right]\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}t\left\{\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}\right\}\right]\left[t_j\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}\right]^k}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}$$

$$\int_0^\infty W^{-k-1/2+m}\left(1+\frac{W}{\left\{t\sum_{j=2}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}}\right)^{k-1/2+m} e^{-W}\,dw$$

$$\times H_{u,v}^{f,g}\left[ct\prod_{j=1}^{r}x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}\left|\begin{matrix}\{(e_u,\gamma_u)\}\\ \{(d_v,\delta_v)\}\end{matrix}\right.\right]f(x_1,x_2,\ldots,x_r)\prod_{j=1}^{r}dx_j,$$

प्राप्त होगा जहाँ प्रत्येक $x_j>0$ तथा $0<\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}<\infty$.

उपर्युक्त व्यंजक में पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर

$$\phi(t)=\frac{t^k}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\prod_{j=1}^{r}x_j^{\alpha_j-1}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma+k}$$

$$\times\exp\left\{-t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}H_{u,v}^{f,g}\left[ct\prod_{j=1}^{r}x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}\left|\begin{matrix}\{(c_u,\gamma_u)\}\\ \{(d_v,\delta_v)\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times f(x_1,x_2,\ldots,x_r)\prod_{j=1}^{r}dx_j\int_0^\infty W^{-k-1/2+m}$$

$$\times\left(1+\frac{W}{\left\{t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}}\right)^{k-1/2+m}e^{-W}\,dw \tag{2·4}$$

आन्तरिक समाकल में $W=tZ$ रखने पर और क्रमशः x_j तथा W के प्रति बहु-समाकलन के क्रम को बदलने पर हमें (2·3) की प्राप्त होती है बशर्ते कि (2·3) में उल्लिखित समस्त प्रतिबन्ध तुष्ट हों।

3. प्रमेय 2.

यदि $\phi(t)=MWT\,[f(x_1,x_2,\ldots,x_r)]$ (3·1)

तथा
$$g(t,z)=MT\left[\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\lambda_2}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\cosh^2 z\right\}\right.$$

$$\left.\times W_{k+\lambda_2,\,1/2-\lambda_2}\left\{t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\cosh^2 z\right\}f(x_1,x_2,\ldots,x_r)\right], \tag{3·2}$$

तो
$$\phi(t)=2t^{\lambda_2}\int_0^\infty P_{m-1/2}^{1-2\lambda_2}(\cosh 2z)\sinh^{2\lambda_2}z\;g(t,z)\,dz, \tag{3·3}$$

बशर्ते कि प्रत्येक $x_j>0$; $R(\alpha_j)$, $R(\beta_j)>0$; $\sigma, \sigma_1>0$; $0<\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}<\infty$; $R(\lambda_2)>0$; $-\delta<R\left[\frac{\sigma+\sigma'}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j+\alpha_j'}{p_j}+\lambda_2\pm(\tfrac{1}{2}-\lambda_2)+\tfrac{1}{2}\right]<-\beta$; $t\neq 0$; $|\arg ct|<\tfrac{1}{2}U\pi$, $U>0$, U, δ, β पूर्ववत हैं; $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ संतत है यदि $x_j>0$, जहाँ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r)=\begin{cases} 0\left[\prod_{j=1}^{r} x_j^{\alpha_j'}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma'}\right], \text{ बशर्ते कि } R(\alpha_j'), R(\beta_j')>0; \\ \qquad R(\sigma')>0 \text{ यदि } x_j \text{ लघु हो } (j=1, 2, \ldots, r) \\ 0\left[e^{-\mu'}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}\right], \text{ बशर्ते कि } R(\mu')>0 \text{ यदि } x_j \text{ दीर्घ हो} \\ \qquad (j=1, 2, \ldots, r) \end{cases}$$

और इस प्रकार से (3·3) में प्राप्त समाकल पर अभिसारी है ।

उपपत्ति:

$W_{k,m}(x)$ के लिये माइजर [4, p. 599] द्वारा प्राप्त समाकल निरूपण का प्रयोग करने पर

$$W_{k,m}(x)=2x^{\lambda_2}\int_0^\infty \exp\{-\tfrac{1}{2}x\sinh^2 z\}\, W_{k+\lambda_2, \frac{1}{2}-\lambda_2} \times\{x\cosh^2 z\}\, P_{m-1/2}^{1-2\lambda_2}(\cosh 2z)\sinh^{2\lambda_2} z\, dz,$$

जहाँ $x\neq 0$, $|\arg|>\tfrac{1}{2}\pi$ तथा (3·1) में $R(\lambda_2)>0$ तो हमें

$$\phi(t)=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} x_j^{\alpha_j-1}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}$$

$$\times H_{u,v}^{f,g}\left[ct\prod_{j=1}^{r}x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=2}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_1}\middle|\begin{matrix}\{(c^u,\gamma^u)\}\\ \{(d_v,\delta_v)\}\end{matrix}\right]$$

$$\times 2\left\{t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\lambda_2}\int_0^\infty \exp\left\{-\tfrac{1}{2}t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\sinh^2 z\right\}$$

$$\times W_{k+\lambda_2, \frac{1}{2}-\lambda_2}\left\{t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\cosh^2 z\right\}$$

$$\times P_{m-1/2}^{1-2\lambda_2}(\cosh 2z)\sinh^{2\lambda_2} z\, dz\, f(x_1, x_2, \ldots, x_r)\prod_{j=1}^{r}dx_j.$$

प्राप्त होता है। दिये हुये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत उपर्युक्त व्यंजक में समाकलन का क्रम परिवर्तित करने पर, जो कि वैध है, हमें

$$\phi(t)=2t^{\lambda_2}\int_0^\infty P_{m-1/2}^{1-2\lambda_2}(\cosh 2z)\sinh^{2\lambda_2} z\,dz\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\prod_{j=1}^r x_j^{\alpha_j-1}\left\{\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma+\lambda_2}$$

$$\times\exp\left\{-\tfrac{1}{2}t\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\cosh^2 z\right\}W_{k+\lambda_2,\,\frac{1}{2}-\lambda_2}\left\{t\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\cosh^2 z\right\}$$

$$\times H_{u,\,v}^{f,\,g}\left[ct\prod_{j=1}^r x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_1}\left|\begin{matrix}\{(c_u,\gamma_u)\}\\ (\{d_v,\delta_v)\}\end{matrix}\right.\right]f(x_1,x_2,\ldots,x_r)\prod_{j=1}^r dx_j$$

$$=2t^{\lambda_2}\int_0^\infty P_{m-1/2}^{1-2\lambda_2}\cosh 2z)\sinh^2 z\,g(t,z)\,dz$$

प्राप्त होगा। इससे प्रमेय 2 की उपपत्ति पूरी हो जाती है जिसमें $g(t, z)$ को (3·2) द्वारा दिया जाता है।

4. उदाहरण

$$\text{माना कि } f(x_1,x_2,\ldots,x_r)=\left(\prod_{j=1}^r x_j^{\alpha_j'}\right)\left\{\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\alpha'}$$

$$\text{तो } \phi(t)=MWT[f(x_1,x_2,\ldots,x_r)]=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\prod_{j=1}^r x_j^{\alpha_j+\alpha_j'-1}\left\{\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma+\sigma'}$$

$$\exp\left\{-\tfrac{1}{2}t\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}W_{k,\,m}\left\{t\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}$$

$$\times H_{u,\,v}^{f,\,g}\left[ct\prod_{j=1}^r x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_1}\left|\begin{matrix}\{(c_u,\gamma_u)\}\\ \{(d_v,\delta_v)\}\end{matrix}\right.\right]\prod_{j=1}^r dx_j$$

अब प्रसाद तथा सिंह[8] के ज्ञात फल (1·2) का उपयोग करने पर

$$\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\prod_{j=1}^r x_j^{\alpha_j-1}\left\{\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma}\exp\left[-\tfrac{1}{2}t\left\{\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}\right]$$

$$\times W_{k,\,m}\left\{t\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}\;H_{u,\,v}^{f,\,g}\left[ct\prod_{j=1}^r x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_1}\left|\begin{matrix}\{(c_u,\gamma_u)\}\\ \{(d_v,\delta_v)\}\end{matrix}\right.\right]\prod_{j=1}^r dx_j$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{r} a_j^{\alpha_j t-k'}}{\prod_{j=1}^{r} p_j} H^{f,\, r+g+2}_{u+r+2,\, v+2}\left[ct^{1-K''}\prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta_j}\left|\begin{matrix}\{(1-\frac{\gamma_r}{p_r}, \frac{\delta_r}{p_r})\}, \{(c_g, \gamma_g)\}, (\frac{1}{2}\pm m-K', K''), (c_{g+1}, \gamma_{g+1}), \ldots, (c_u, \gamma_u)\\ \{(d_f, \delta_f)\}, (K-K', K''), (d_{f+1}, \delta_{f+1}), \ldots, (d_v, \delta_v), (1-\sigma-K', K''-\sigma_1)\end{matrix}\right.\right],$$

जहाँ $K'=(\sigma+\sum_{j=1}^{r}\frac{\gamma_j}{p_j})$, $K''=(\sigma_1+\sum_{j=1}^{r}\frac{\delta_j}{p_j})$ तथा (1·2) में कथित समस्त प्रतिबन्ध तुष्ट हो जाते हैं।

अतः

$$\phi(t)=\frac{\prod_{j=1}^{r} a_j^{\alpha_j+\alpha_j'}}{\prod_{j=1}^{r} p_j}(t^{-K'})\, H^{f,\, r+g+2}_{u+r+2,\, v+2}\left[ct^{1-k''}\prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta_j}\left|\begin{matrix}\{(1-\frac{\gamma_r}{p_r}, \frac{\delta_r}{p_r})\}, \{(c_g, \gamma_g)\}, (\frac{1}{2}\pm m-K', K''), (c_{g+1}, \gamma_{g+1}), \ldots, (c_u, \gamma_u)\\ \{(d_f, \delta_f)\}, (K'-K', K''), (d_{f+1}, \delta_{f+1}), \ldots, (d_v, \delta_v), (1-\sigma-K', K''-\sigma_1)\end{matrix}\right.\right] \tag{4·1}$$

और भी

$$g(t, z)=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} x_j^{\alpha_j+\alpha_j'-1}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma+\sigma'+\lambda_2}$$

$$\times\exp\left\{-\tfrac{1}{2}t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\cosh^2 z\right\} W_{k+\lambda_2,\, 1/2-\lambda_2}\left\{t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\cosh^2 z\right\}$$

$$\times H^{f,\, g}_{u,\, v}\left[ct\,\mathrm{sech}^2 z\cosh^2 z\prod_{j=1}^{r} x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_1}\left|\begin{matrix}\{(c_u, \gamma_u)\}\\ \{(d_v, \delta_v)\}\end{matrix}\right.\right]\prod_{j=1}^{r} dx_j$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{r} a_j^{\alpha_j+\alpha_j'}}{\prod_{j=1}^{r} pj}(t\operatorname{sech}^2 z)^{-K'} H_{u+r+2,\ u+2}^{f,\ r+g+2}\left[c(t\operatorname{sech}^2 z)^{1-K'}\prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta_j}\right.$$

$$\times\left|\begin{matrix}\{(1-\frac{\gamma_r}{p_r},\frac{\delta_r}{p_r})\},\{(c_g,\gamma_g)\},(\tfrac{1}{2}\pm(\tfrac{1}{2}-\lambda)-K',K''),(c_{g+1},\gamma_{g+1}),\ldots,(c_u,\gamma_u)\\ \{(d_f,\delta_f)\},(K+\lambda_2-K',K''),(d_{f+1},\delta_{f+1}),\ldots,(d_v,\delta_v),(1-\sigma-\sigma'-\lambda_2-K',K''-\sigma_1)\end{matrix}\right] \quad (4\cdot2)$$

अत: (3·3) में (4·1) तथा (4·2) से $\phi(t)$ तथा $g(t, z)$ के मान रखने पर

$$\int_0^\infty p_{m-1/2}^{1-2\lambda_2}(\cosh 2z)\sinh^{2\lambda_2}\operatorname{sech}^{-2K'} z$$

$$\times H_{u+r+2,\ v+2}^{f,\ r+g+2}\left[c(t\operatorname{sech}^2 z)^{1-K''}\prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta_j}\left|\begin{matrix}\{(1-\frac{\gamma_r}{p_r},\frac{\delta_r}{p_r})\},\{(c_g,\gamma_g)\},\\ \{(d_f,\delta_f)\},(K+\lambda_2-K',K''),\end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(\tfrac{1}{2}\pm(\tfrac{1}{2}-\lambda_2)-K',K'')\ (c_{g+1},\gamma_{g+1}),\ldots,(c_u,\gamma_u)\\ (d_{f+1},\delta_{f+1}),\ldots,(d_v,\delta_v),\ (1-\sigma-\sigma'-\lambda_2-K',K''-\sigma_1)\end{matrix}\right]dz$$

$$=\tfrac{1}{2}t^{-\lambda_2}\ H_{u+r+2,\ v+2}^{f,\ r+g+2}\left[ct^{1-K''}\prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta j}\left|\begin{matrix}\{(1-\frac{\gamma_r}{p_r},\frac{\delta_r}{p_r})\}\\ \{(d_f,\delta_f)\},(K-K',K'')\end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{(c_g,\gamma g)\},(\tfrac{1}{2}\pm m-K',K''),(c_{g+1},\gamma_{g+1}),\ldots,(c_u,\gamma_u)\\ (d_{f+1},\delta_{f+1}),\ldots,(d_v,\delta_v),(1-\sigma-K',K''-\sigma_1)\end{matrix}\right],$$

जहाँ K' तथा K'' पूर्ववत हैं तथा प्रमेय 2 में कथित प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं ।

5. **प्रमेय 3.**

यदि $\phi(t)=MWT\,[f(x_1, x_2, \ldots, x_r)],$ (5·1)

तथा $g(t,z)=MT\left[\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{pj}\right\}^{1/2}\exp\left\{-t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{pj}\right\}\right.$

$$\left.\times K_{2m}\left(2\sqrt{t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{pj}\,zj}\right)f(x_1,x_2,\ldots,x_r)\right], \quad (5\cdot2)$$

तो $\phi(t)=\frac{4t^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)}\int_0^\infty e^{-z^2} z^{-2k} g(t, z)\, dz,$ (5·3)

बशर्ते कि $R(\frac{1}{2}-k\pm m)>0$. $R(t)>0$; $R(\alpha_j)$, $R(\beta j)>0$; प्रत्येक $x_j>0$; $0<\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{pj}<\infty$;
$f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ एक संतत फलन है यदि $x_j>0$; $\sigma, \sigma_1>0$; $|\arg ct|<\frac{1}{2}U\pi$, $U>0$;

$$U=\sum_{j=1}^{f}\delta_j-\sum_{j=f+1}^{v}\delta_j+\sum_{j=1}^{g}\gamma_j-\sum_{j=g+1}^{u}\gamma_j;\ -\delta<R\left(\frac{\sigma+\sigma'}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j+\alpha_j'}{p_j}\pm m+\frac{1}{2}\right)$$
$$<-\beta;\ \delta=\min R\left(\frac{a_j}{\delta_j}\right),\ (j=1, 2, \ldots, f);\ \beta=\max R\left(\frac{c_i-1}{\gamma_i}\right),\ (i=1, 2, \ldots, g)$$

तथा

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r)=\begin{cases} 0\left[\prod_{j=1}^{r}x_j^{\alpha_j'}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{pj}\right\}^{\sigma'}\right] \text{ बशर्ते कि } R(\alpha_j'), R(\beta_j')>0; \\ \qquad R(\sigma')>0 \text{ यदि } x_j \text{ लघु हो} \\ 0\left[e^{-\mu'\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}}\right], \text{ बशर्ते कि } R(\mu')>0 \text{ यदि } x_j \text{ दीर्घ हो ।} \end{cases}$$

तथा (5·3) में इस प्रकार से प्राप्त समाकल पूर्णया अभिसारी है ।

उपपत्ति

$W_{k,m}(x)$ के लिये माइजर [4, p. 299] के समाकल निरूपण को व्यवहृत करने पर

$$W_{k,m}(x)=\frac{4\left\{t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)}\exp\left\{-\frac{1}{2}t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{pj}\right\}$$
$$\int_0^\infty e^{-z^2} z^{-2k} K_{2m}\left\{2\sqrt{\left(t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}z\right)}\right\} dz,$$

जहाँ $R(t)>0$ तथा (5·1) $R(\frac{1}{2}-k\pm m)>0$, में हमें

$$\phi(t)=\frac{4t^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\prod_{j=1}^{r}x_j^{\alpha_j-1}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{pj}\right\}^{\sigma+1/2}$$
$$\times\exp\left\{-t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{pj}\right\}H_{u,v}^{f,g}\left[ct\prod_{j=1}^{r}x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{pj}\right\}\middle|\begin{matrix}\{(c_u, \gamma_u)\}\\ \{(d_v, \delta_v)\}\end{matrix}\right]$$
$$\times f(x_1, x_2, \ldots, x_r)\prod_{j=1}^{r}dx_j\int_0^\infty e^{-z^2} z^{-2k} K_{2m}\left\{2\sqrt{\left(t\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{pj}z\right)}\right\} dz$$

प्राप्त होगा। उपर्युक्त व्यंजक में बहु समाकलन के क्रम को बदलने पर जो दिये प्रबिन्धों के अन्तर्गत वैध है,

$$\phi(t)=\frac{4t^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)}\int_0^\infty e^{-z^2} z^{-2k}\, dz \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^r x_j^{\alpha_j-1}\left\{\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\gamma+1/2}$$

$$\times \exp\left\{-t\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\} H_{u,\,v}^{f,\,g}\left[ct \prod_{j=1}^r x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_1}\middle|\begin{matrix}\{(c_u,\gamma_u)\}\\ \\ (\{d_v,\delta_v)\}\end{matrix}\right]$$

$$\times K_{2m}\left(2\sqrt{\left\{t\sum_{j=1}^r (a_j/a_j)^{p_j} z\right)}\right\} f(x_1, x_2, \ldots, x_r)\prod_{j=1}^r dx_j$$

जिससे अन्ततः

$$\phi(t)=\frac{4t^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)}\int_0^\infty e^{-z^2} z^{-2k} g(t, z)\, dz$$

प्राप्त होता है जहाँ $g(t, z)$ को (5·2) द्वारा दिया जाता है। इससे प्रमेय 3 की उपपत्ति पूरी होती है। समाकलन के क्रम का प्रतिलोमन निम्न प्रकार से वैध है:

Z-समाकल पूर्णतया अभिसारी होगा यदि $R(t)>0$, $R(\frac{1}{2}\pm m-k)>0$. x_j में बहु समाकल अभिसारी होता है यदि $R(\alpha_j)$, $R(\beta_j)>0$; प्रत्येक $x_j>0$; $0<\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}<\infty$; $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ संतत फलन हैं यदि $x_j>0$; σ, $\sigma_1>0$; $|\arg ct|<\frac{1}{2}U\pi$, $U>0$,

$$U=\sum_{j=1}^f \delta_j-\sum_{j=f+1}^v \delta_j+\sum_{j=1}^g \gamma_j-\sum_{j=g+1}^u \gamma_j;\ -\delta<R\left(\frac{\sigma+\sigma'}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{j=1}^r \frac{\alpha_j+\alpha_j'}{p_j}\pm m+\frac{1}{2}\right)$$

$$\times<-\beta;\ \delta=\min R\left(\frac{\alpha_j}{\delta_j}\right),\ (j=1, 2, \ldots, f);\ \beta=\max R\left(\frac{c_i-1}{\gamma_j}\right),\ (i=1, 2, \ldots, g)$$

तथा $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)=\begin{cases} 0\left[\prod_{j=1}^r x_j^{\alpha_j'}\left\{\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma'}\right], & \text{बशर्ते कि } R(\alpha_j'), R(\beta_j')>0;\ R(\sigma')>0 \text{ यदि लघु हो} \\ 0\left[e^{-\mu'\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}}\right], & \text{बशर्ते कि } R(\mu')>0 \text{ यदि } x_j \text{ दीर्घ हो।}\end{cases}$

(5·3) में इस प्रकार से प्राप्त समाकल पूर्णतया अभिसारी है अतः समाकलन के क्रम परिवर्तन द ला वाले पूसिन के प्रमेय [1, p. 504] द्वारा वैध हैं।

निर्देश

1. द ला वाले पूसिन, Ann. de la Soc. Scientifique de Bruxelle, 1892 XVI 150-80

2. एडवर्ड्स, जे०, A Treatise on the Integral Calculus, भाग II चेल्सिया पब्लिशिंग कम्पनी, न्यूयार्क, 1954

3. फाक्स, सी०, ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०, 1961 98, 395-429

4. माइजर, सी० एस०, Proc. Nedsl Akad. Wetensch, Amsterdam 1941, 44, 298-307

5. मुखर्जी, एस० एन० तथा प्रसाद, वाई० एन०, मैथ० एजु०, 1971, 5A 5-12

6. प्रसाद, वाई० एन०, पी० एच० डी० थीसिस, बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, 1969

7. प्रसाद, वाई० एन० तथा सिद्दीकी, ए०, ज्ञानाभा, 1974, 4A, 119-27

8. प्रसाद, वाई० एन० तथा सिंह, एस० एन०, इंडि० जर्न० प्योर० एप्लाइड मैथ० (प्रेषित)

9. व्हिटेकर, ई० टी० तथा वाट्सन, जी० एन०, A Course of Modern Analysis. कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, 1969

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 2, April, 1976, Pages, 117-124

DL-α-एमीनो ब्यूटिरिक अम्ल से पैलेडियम (II), प्लैटिनम (IV), गोल्ड(III) तथा बिस्मथ (III) के कीलेटों का निर्माण एवं उनका स्थायित्व

जय प्रकाश नारायण श्रीवास्तव तथा मनहरन नाथ श्रीवास्तव
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—अक्टूबर 8, 1975]

सारांश

α- ऐमीनो ब्यूटिरिक अम्ल द्वारा पैलेडियम (II), प्लैटिनम (IV), गोल्ड (III) तथा विस्मथ (III) के कीलेटों के निर्माण का अध्ययन बेरम तथा इर्विंग एवं रोसोटी की विभवमापी विधि द्वारा किया गया। $0\cdot1M$ सोडियम परक्लोरेट के माध्यम में 20° सें० पर अम्ल के प्रोटॉनीकरण स्थिरांकों के मान क्रमश: log K_1H 9·62, log K_1H 2·35 प्राप्त हुये। कीलेटों के स्थायित्व स्थिरांकों के मान क्रमश: पैलेडियम (III) log K_1 9·44, log K_2 9·42; प्लैटिनम (IV) log K_1 9·61, log K_2 8·71, log K_3 3·87, log K_4 3·63; गोल्ड (III) log K, 912, log K_2 8·84, log K_3 7·73, log K_4 4·38; बिस्मथ (III) log K_1 9·54, log K_2 9·52 प्राप्त हुये।

Abstract

Formation and stabilities of palladium (II), platinum (IV), gold (III) and bismuth (III) chelates of DL-α aminobutyric acid. *By* J. P. N. Srivastava and M. N. Srivastava, Chemistry Department, University of Allahabad, Allahabad.

The metal chelates of Pd(II), Pt(IV), Au(III) and Bi(III) formed with *DL-α*-aminobutyric acid have been studied potentiometrically employing methods of Bjerrum and Irving and Rossotti. The protonation constants in 0.1 M sodium perchlorate medium at 20°C are reported as log K_1H=9.62 and log K_2H=2.35. It is observed that in Bi(III) system, precipitation occcurs from ∼4.5 pH whereas in other systems the solutions remain clear throughout. Further, it is clear from the formation curves of these chelate systems that $\bar{n}$ approaches a maximum value of ≈2 for Pd(II) chelates

and also in Bi(III) systems (before precipitation starts) and 4 for Pt(IV) and Au(III) chelates. It is thus clear that with Pd(II) and Bi(III) only two metal chelates (before the prreipitation starts in case of Bi(III)) ML and ML_2 are formed whereas with Pt(IV) and Au(III) four chelates ML, ML_2, ML_3 and ML_4 are formed stepwise. Their stepwise stability constants in 0.1M $NaClO_4$ medium at 20°C are reported as:—

log K_1 9.44, log K_2 9.42 for Pd(II); log K_1 9.61, log K_2 8.71, log K_3 3.87, log K_4 3.63 for Pt(IV); log K_1 9.12, log K_2 88.4, log K_3 7.73, log K_4 4.38 for Au(III); and log K_1 9.54, log K_2 9.52 for Bi(III) chelates.

It appears that in gold (III) chelates the coordination number is extendend beyond six, probably to eight, but in Pt(IV) chelates, since K_3 and K_4 are rather very close, and quite low in comparison to K_1 and K_2, it appears more likely that in Pt the first two ligand molecules are attached as bidentate ligands, but in latter two, probably monodentate coordination occurs, and maximum coordination number is limited to six only.

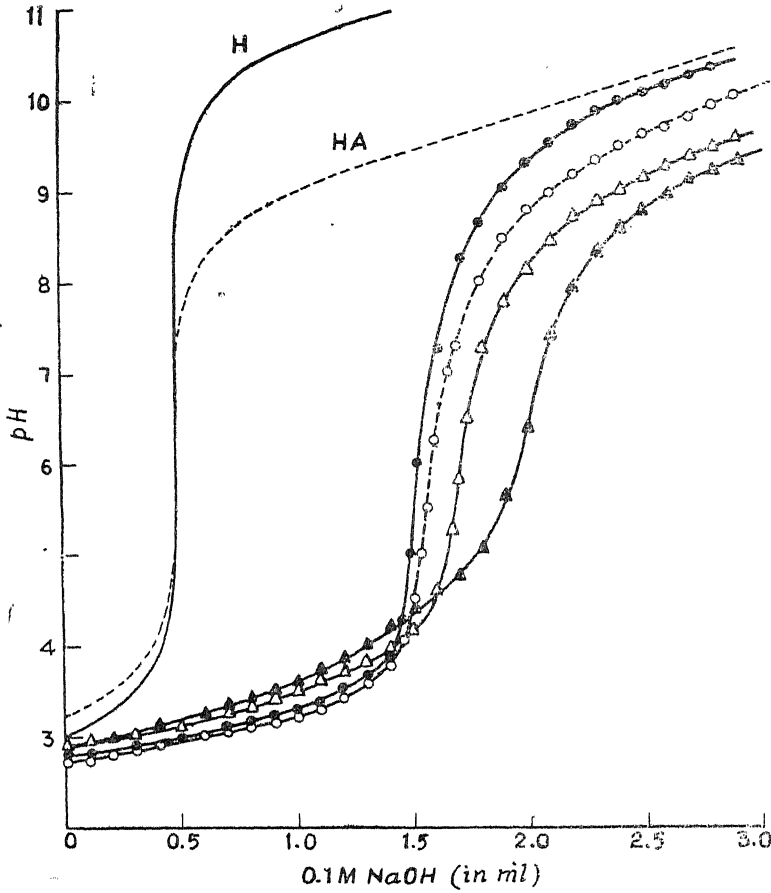
इस प्रयोगशाला से प्रकाशित कुछ शोध पत्रों में [1,-2] ऐमीनो अम्लों से निर्मित कुछ धातु आयनों के कीलेटों का अध्ययन किया गया है। संदर्भों के सर्वेक्षण से प्रगट है कि *DL-α-* ऐमीनो ब्यूटिरिक अम्ल से निर्मित कुछ संक्रमण धातु आयनों के कीलेटों [3-10] के निर्माण का अध्ययन पहले भी किया गया है और उनके स्थायित्व स्थिरांक सम्बन्धी आँकड़े भी उपलब्ध हैं। प्रस्तुत शोध में *DL-α-*ऐमीनो ब्यूटिरिक अम्ल से पैलैडियम (II), प्लैटिनम (IV), गोल्ड (III) और बिस्मथ (III) के कीलेटों के निर्माण का अध्ययन और उनके स्थायित्व स्थिरांकों का परिकलन किया गया है। यह अध्ययन इर्विंग एवं रोसोटी [11] द्वारा संशोधित कैलविन [12] तथा बेरम [13] की पी-एच अनुमापन विधि द्वारा किया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रयुक्त अभिकर्मक : *DL-α-* ऐमीनो ब्यूटिरिक अम्ल (बी०डी०एच०), पैलैडियम क्लोराइड (केमप्योर), प्लैटिनम क्लोराइड (सिस्को), गोल्ड क्लोराइड (सिक्को), बिस्मथ नाइट्रेट (अनालार बी० डी० एच०), परक्लोरिक अम्ल (रीडेल), सोडियम परक्लोरेट (रीडेल), सोडियम हाइड्राक्साइड (मर्क) के विलयन कार्बन डाइ आक्साइड से मुक्त शुद्ध आसुत जल में बनाये गये तथा उनका मानकीकरण उपयुक्त मानक विधियों [14-15] द्वारा किया गया। पी-एच के मापनों के लिये लीड्स-नार्थ्रप का पी-एच मापी (20° सें० पर) प्रस्तुत किया गया।

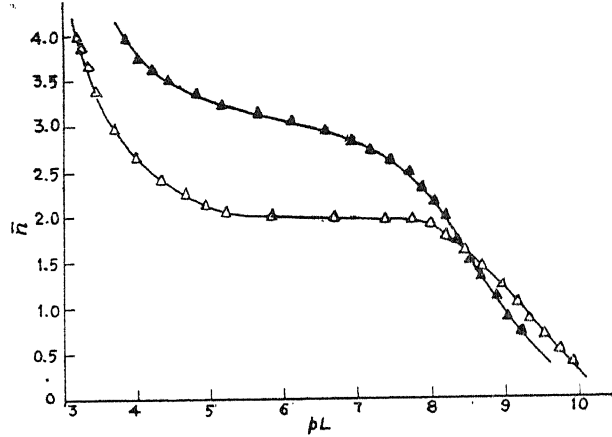
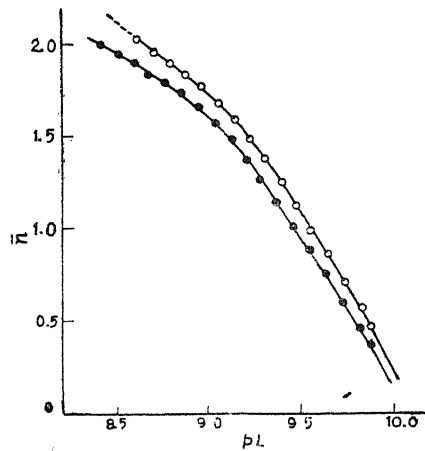
अनुमापन विधि : निम्नलिखित मिश्रण तैयार किये गये एवं प्रत्येक का पूर्ण आयतन 50 मिली० रखा गया।

(अ) अम्ल (10 मिली० 0·5*M* सोडियम परक्लोरेट तथा 20 मिली० ·01*M* परक्लोरिक अम्ल), (ब) लिगैंड (मिश्रण अ और 10 मिली० 0·02*M* *DL-α-* ऐमीनो ब्यूटिरिक अम्ल), (स) संकर [मिश्रण ब और किसी धातु आयन के 0·01*M* विलयन का 5 मिली० (Pt (IV) आयन की सान्द्रता 0·012*M*)]।

इन मिश्रणों का पुनः एक कार्बोनेट मुक्त मानक 0·1M सोडियम हाइड्राक्साइड विलयन द्वारा पृथक-पृथक पी-एच मापी अनुमापन किया गया । सभी अनुमापन 20° सें० पर एक जल जैकेट से मुक्त मुद्रित पात्र

H, 0.001 M $HClO_4$ + 0.1 M $NaClO_4$; HA, H + 0.004 M DL-α- ऐमीनो ब्यूटिरिक अम्ल. [Pd (III)], [Au (III)], [Bi (III)] = 0.001 M; [Pt (IV)] = 0.0012 M
पूर्ण आयतन = 50 मिली०; ताप = 20° से०
● Pd (II); Δ Pt (II); ▲ Au (IV); ○ Bi (III) (- -अवक्षेपण)
चित्र 1. DL-α- ऐमीनो ब्यूटिरिक अम्ल कीलेट निकायों के पी-एच अनुमापन वक्र

में किये गये । अनुमापन के पूर्व तथा बीच में कार्बन डाइआक्साइड से मुक्त करने के लिए मिश्रण विलयनों में शुद्ध नाइट्रोजन गैस प्रवाहित की गयी । पी-एच अनुमापन वक्रों के पारस्परिक अंतरों से इर्विंग तथा रोसोटी के समीकरणों के द्वारा $\bar{n}_A$, $\bar{n}$ तथा pL की गणना की गई । पी-एच अनुमापन वक्र चित्र 1 में प्रदर्शित हैं ।

परिणाम तथा विवेचना

पी-एच अनुमापनों से प्रगट है कि Pd (II), Pt (IV) तथा Au (III के निकायों में विलयन निरंतर निर्मल रहते हैं परन्तु Bi (III) के निकाय में क्षार की मात्रा बढ़ाने पर ~4·5 पी-एच पर अवक्षेपण होने लगता है। इसके अतिरिक्त लिगैन्ड तथा संकरों के विभिन्न पी-एच अनुमापन वक्रों के पारस्परिक अन्तरों से यह स्पष्ट है कि कीलेटों के निर्माण में Pd (II) तथा Bi (III) के निकायों (अवक्षेपण के पहले) में दो प्रोटान मुक्त होते हैं परन्तु Pt (IV) तथा Au(III) के निकायों में कुल चार प्रोटान मुक्त होते प्रतीत होते हैं।

चित्र 2. DL-α-ऐमीनो ब्यूटिरेट कीलेटों के निर्माण वक्र; Δ Pt(IV); ▲ Au (III). ताप = 20° से०; μ = 0.1 M

चित्र 3. DL-α-ऐमीनो ब्यूटिरेट कीलेटों के निर्माण वक्र ● Pd (II); ○ Bi (III). ताप = 20° से०, μ = 0.1 M

चित्र 2 तथा 3 में कीलेटों के निर्माण वक्र ($\bar{n}$ तथा pL के मध्य) प्रदर्शित हैं। इस संदर्भ में यह उल्लेखनीय है कि $\bar{n}$ की गणना Bi (III) के निकाय में उसी बिन्दु तक की गयी है जहाँ तक विलयन

पूर्णतः निर्मल थे । इस प्रकार इन निर्माण वक्रों से स्पष्ट है कि Pd (II) तथा Bi (III) के कीलेटों के लिये N का मान केवल 2 है, जबकि Pt (IV) तथा Au (III) में N का मान 4 है अर्थात् Pd (II) तथा Bi (III) में केवल दो कीलेट ML तथा ML_2 बनाते हैं जबकि Pt (IV) तथा Au (III) में चार कीलेट, क्रमशः ML, ML_2 ML_3 तथा ML_4 बनते हैं ।

DL-α- ऐमीनो ब्यूटिरिक अम्ल के प्रोटान-लिगैन्ड संकर के निर्माण वक्र ($\bar{n}$ तथा pL के मध्य) से इसके प्रोटॉनीकरण स्थिरांकों[16] के मान $\log K_1H$ 9·62 तथा $\log K_2H$ 2·35 प्राप्त हुये ।

Pd (II) तथा Bi (III) के कीलेटों के दो-दो स्थायित्व स्थिरांक, K_1 तथा K_2 परिकलित किये गये । निर्माण वक्रों के विश्लेषण से स्पष्ट है कि Pd (II) तथा Bi (III) के कीलेटों में K_1/K_2 का अनुपात $\approx 10^{0.7}$ है । अतः इन धातु आयनों के कीलेटों के स्थायित्व स्थिरांकों का परिकलन संशोधन पद तथा उत्तरोत्तर सन्निकटन विधियों द्वारा किया गया है ।

Pt (IV) तथा Au (III) के कीलेटों के चार स्थायित्व स्थिरांक K_1, K_2, K_3 तथा K_4 परिकलित किये गये हैं । यह दृष्टव्य है कि Pt (IV) एवं Au (III) के कीलेटों में K_1/K_2 का अनुपात ≈ 10 है जबकि K_2/K_3 का अनुपात क्रमशः $\approx 10^{1.6}$ तथा $\approx 10^{0.9}$, तथा K_3/K_4 का अनुपात क्रमशः $\approx 10^{0.8}$ तथा $\approx 10^{3.2}$ है । अतः Au (III) के K_1, K_2, K_3 के मान उत्तरोत्तर सन्निकटन विधि द्वारा परिकलित किये गये और K_4 का मान मध्यमान विधि द्वारा ज्ञात किया गया क्योंकि K_3 तथा K_4 के मानों में इतना अधिक अन्तर है कि K_4 पर K_3 का कोई विशेष प्रभाव न होगा । परन्तु Pt (IV) के निकाय में K_1 तथा K_2 के मान एवं K_3 तथा K_4 के मान सन्निकट हैं, जबकि K_2 तथा K_3 के मानों में बहुत अन्तर है । अतः इनके परिकलन के लिये निर्माण वक्र को दो क्षेत्रों ($0<\bar{n}<2$) तथा ($2<n<4$) में बाँट लिया गया और फिर K_1 तथा K_2 एवं K_3 तथा K_4 के मान अलग-अलग संशोधन पद विधि एवं उत्तरोत्तर सन्निकटन विधि द्वारा परिकलित किये गये । परिणाम सारणी 1 में प्रस्तुत हैं ।

इस संदर्भ में उल्लेखनीय है कि Au(III) तथा Pt (IV) की उपसहसंयोजन संख्या साधारणतः 6 होती है, परन्तु कुछ दृष्टान्तों में यह 6 से अधिक भी पायी गयी है [17] । यदि ऐमीनो ब्यूटिरिक अम्ल एक द्विदंती लिगैन्ड की भाँति आचरण करे तो इनके ML_4 कीलेटों में उपसहसंयोजन संख्या 8 हो जाती प्रतीत होती है । Au (III) में ML_3 बनने तक K_1, K_2 एवं K_3 के मान अत्यन्त उच्च तथा सन्निकट हैं परन्तु चौथे लिगैन्ड के संयुक्त होने से सम्बन्धित K_4 का मान अपेक्षाकृत बहुत कम है । इससे यह अनुमान लगाया जा सकता है कि 6 उपसहसंयोजन संख्या भरने तक कीलेट स्थायी बनते हैं, परन्तु जब उपसहसंयोजन संख्या 6 से अधिक (संभवतः 8) होने लगती है, तो उस प्रक्रिया की प्रवृत्ति कोई अधिक प्रबल नहीं होती है, इसीलिये K_4 का मान अपेक्षाकृत अत्यधिक कम आता है ।

Pt (IV) के निकाय में K_1 तथा K_2 और फिर K_3 तथा K_4 के मान सन्निकट हैं । संभवतया इसका कारण यह है कि DL-α-ऐमीनो ब्यूटिरिक अम्ल लिगैन्ड के प्रथम दो अणु द्विदंती लिगैन्ड की भाँति आचरण करके कीलेट यौगिक बनाते हैं । परन्तु बाद में संयुक्त होने वाले लिगैन्ड के शेष दो अणु संभव-

सारणी 1

LD-α- ऐमीनो ब्यूटिरिक अम्ल से निर्मित Pd (II), Pt (IV), Au (III) तथा Bi (III) के कीलेटों के स्थायित्व स्थिरांक

ताप 20° सें०; μ=0.1*M* सोडियम परक्लोरेट

धातु आयन	पी-एच परिसर	परिकलन विधि	स्थायित्व स्थिरांक				
			$\log K_1$	$\log K_2$	$\log K_3$	$\log K_4$	$\log B_n$
Pd (II)	2·25-4·0	अर्द्ध $\bar{n}$ के मान	9·79	9·07	—	—	—
		संशोधन पद विधि	9·43	9·40	—	—	18·83
		उत्तरोत्तर सन्निकटन विधि	9·44	9·42	—	—	18.86
Pt (IV)	2·25-9·4	अर्द्ध $\bar{n}$ के मान	9·72	8·60	4·15	3·35	—
		संशोधन पद विधि					
		अ. ($0<\bar{n}<2$)	9·63	8·69	—	—	25·81
		ब. ($2<\bar{n}<4$)	—	—	3·90	3·59	
		उत्तरोत्तर सन्निकटन विधि					
		अ. ($0<\bar{n}<2$)	9·61	8·71	—	—	25·82
		ब. ($2>\bar{n}<4$)	—	—	3·87	3·63	
Au (III)	2·25-8·8	अर्द्ध $\bar{n}$ के मान	9·39	8·52	7·65	4·40	—
		उत्तरोत्तर सन्निकटन विधि					
		($0<\bar{n}<3$)	9·12	8·84	7·73	—	30·07
		मध्यमान विधि					
		($3<\bar{n}<4$)	—	—	—	4·38	
Bi (III)	2·25-3·9	अर्द्ध $\bar{n}$ के मान	9·89	9·20	—	—	—
		संशोधन पद विधि	9·55	9·50	—	—	—
		उत्तरोत्तर सन्निकटन विधि	9·54	9·52	—	—	—

तया एकदंती लिगैन्ड की ही भाँति आचरण करते हैं और कुल उपसहसंयोजन संख्या 6 तक ही सीमित रहती है। Pt (II) के trans-[Pb(*gly* H)$_2$ Cl$_2$] संकर में ग्लाइसीन का एकदंती व्यवहार पहले भी देखा जा चुका है [18]।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक उत्तर प्रदेश सरकार के राज्य विज्ञान एवं प्राद्योग परिषद, लखनऊ के आर्थिक सहायता के हेतु आभारी हैं।

निर्देश

1. सिंह, एम० के० तथा श्रीवास्तव, एम० एन०, **जर्न० इनआर्गे० न्यूक्लि० केमि०**, 1972, **34**, 576, 2067, 2081; **तैलन्टा**, 1972, **19**, 699; **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1972, **15**, 61.
2. तिवारी, आर० सी० तथा श्रीवास्तव, एम० एन०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1973, **16**, 67. **जर्न० इन आर्गे० न्यूक्लि० केमि०**, 1973, 35, 2441, 3044; **तैलन्टा**, 1973, **20**, 133, 360.
3. एलबर्ट, ए०, **बायोकेमि० जर्न०**, 1950, **47**, 531.
4. पर्किन्स, डी० जे०, **बायोकेमि० जर्न०**, 1953, **55**, 649.
5. पेरिन, डी० डी०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1958, 3125; 1959, 290.
6. शर्मा, वी० एस०, माथुर, एच० बी० तथा बिस्वास, ए० बी०, **जर्न० इनआर्गे० न्यूक्लि० केमि०**, 1964, **26**, 382.
7. शर्मा, वी० एस०, माथुर, एच० बी० तथा कुलकर्णी, पी० एस०, **इन्डियन जर्न० केमि०**, 1965, **3**, **146**.
8. राजू, ई० वी० तथा माथुर, एच० बी०, **जर्न० इनआर्गे० न्यूक्लि० केमि०**, 1968, **30**, 2181.
9. मियर, जे० एल० तथा बाऊमैन, जे० ई०, जूनियर, **जर्न० केमि० इन्जी० डाटा**, 1970, **15**, 404.
10. गर्गेली, ए०, मोज़ेस, जे० तथा केसाई बाज्सा, जेड एस०, **जर्न० इनआर्गे० न्यूक्लि० केमि०**, 1972, **34**, 1277.
11. इर्विंग, एच० तथा रोसोटी, एच० एस० **जर्न० केमि० सोसा०**, 1953, 3397; 1954, 2904.
12. कैल्विन, एम० तथा विल्सन, के० डब्लू०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1954, **67**, 2003.
13. बेरम, जे० "Metal ammine Formation in Aqueous Solutions" पी० हास एन्ड सन्स, कोपेनहैगेन, 1942.
14. हिलब्रान्ड, डब्लू० एफ०, लन्डेल, जी० ई० ब्राइट, एच० ए०, तथा हाफमैन, जे० आई० "Applied Inorganic Analysis" जॉन एफ० विले एन्ड सन्स, न्यूयार्क 1953, 379, 364, 366.

15. वेलचर, एफ० जे० "The Analytical uses of EDTA" डी० वॉन नास्ट्रंड कम्पनी, न्यूयार्क 209.

16. श्रीवास्तव, जे० पी० एन० तथा श्रीवास्तव, एम० एन०, इन्डियन जर्न० केमि० (प्रकाशनाधीन)

17. बेलर, जे० सी० जूनि० तथा इमिलियस, एच० जे० "Comprehensive Inorganic Chemistry" vol. 3 परगमॉन प्रेस, न्यूयार्क 1973, 171.

18. कीफ्ट, जे० ए० तथा नाकामोटो, के०, जर्न० इनार्ग० न्यूक्लि० केमि०, 1967, 29, 2561.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 2, April, 1976, Pages 125-130

प्रोटॉन लिगैन्ड संभवन स्थिरांक एवम् Tl(I)-5-क्लोरो सैलिसिलेट के संभवन स्थिरांक

पी० वी० खड़ीकर
रसायन अध्ययन शाला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

तथा

पी० एस० देशमुख
शासकीय महाविद्यालय, खरगौन

[प्राप्त—नवम्बर 27, 1975]

सारांश

प्रोटॉन-लिगैन्ड सभवन स्थिरांक एवं Tl(I) के 5-क्लोरो सैलिसिलिक अम्ल (5-क्लो० सै० अ०) के साथ संकर के 30° से० पर (50% जलीय-एथनॉल, 0.1 M $NaClO_4$) संभवन स्थिरांक विभिन्न विधियों द्वारा निकाले गए। प्रोटॉन लिगैन्ड संभवन स्थिरांक के औसत मान log pK_1^H (11.61) तथा log pK_2^H (2.62) पाये गए। संकर के संभवन स्थिरांकों के संगत मान क्रमशः 8.51 तथा 5.23 पाए गए।

5-क्लो० सै अ० के साथ बनने वाले धातु संकर के संभवन स्थिरांक ज्ञात करने के लिए यह आवश्यक है कि उसके प्रथम तथा द्वितीय प्रोटॉन-लिगैन्ड संभवन स्थिरांक ज्ञात किये जायँ। प्रस्तुत कार्य में इसे अर्ध-समाकल (अ० स०) बिन्दुशः गणना (बि० ग०) तथा रेखीय आरेख (रे० आ०) विधियों द्वारा निकाला गया। Tl(I)-5-क्लो० सै अ० के संभवन स्थिरांकों के मान इन्हीं विधियों से ज्ञात किए गए।

Abstract

Proton-ligand formation constants and formation constants of Tl(I) complexes. *By* P. V. Kharikar, Chemistry Department, Vikram University, Ujjain and P. S. Deshmukh, Government Mahavidyalya, Khargon.

Proton-ligand formation constants and formation constants of Tl(I) complexes with 5-chlorosalicylic acid have been determined at 30°C (50% ethanol, 0.1M $NaClO_4$)

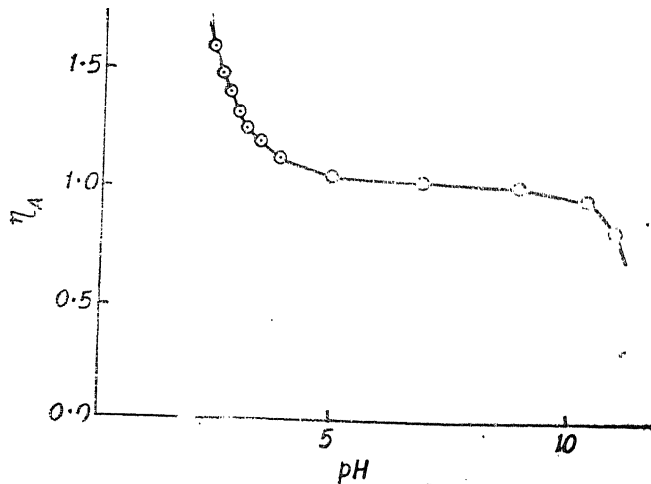
by various computational methods. The average values for proton-ligand formation constants are found to be log pK_1^H (11.61) and log pK_2^H (2.62), the corresponding values for formation constants are 8.51 and 5.23 respectively.

In the investigation of formation constants of metal complexes formed by 5-chlorosalicylic acid (5-CLSA) it is necessary to determine its first and second proton-ligand formation constants. This has been done in the present investigation employing half-integral, point-wise calculation and linear plot methods. The formation constants of Tl(I)-5-CLSA have also been determined using these methods. The literature does not reveal the values of proton-ligand formation constants of 5-CLSA and the formation constants of Tl(I)-5-chlorosalicylates for the purpose of comparision under the experimental condition used in present investigation.

प्रयोगात्मक

सब रसायन B. D. H. एनेलार कोटि के उपयोग में लाए गए।

30° से० पर पी० एच-मापी अनुमापन के लिए वोलीमैंट्रान पी० एच-मापी माड्ल CL-41 का उपयोग किया गया। पी० एच का मापन ±0.05 पी० एच इकाई तक सही था। पी० एच-मापी का 4.01 पी० एच तथा 9.11 पी० एच के केम्ब्रीज-बफर गोलियों की सहायता से अंशांकन किया गया।

(i) मुक्त $HClO_4$ (ii) मुक्त $HClO_4$+5-क्लो० सं० अ० तथा (iii) मुक्त $HClO_4$+5-क्लो०

चित्र 1 प्रोटॉन लिगैन्ड संभवन वक्र

सै० अ० +Tl(I) के पी० एच-मापी अनुमापन 50% (आ/आ) जलीय एथेनॉल माध्यम में प्रमाणित NaOH विलयन के विरुद्ध किये गए, जबकि विलयन की आयनिक सांद्रता 0.1M $NaClO_4$ रखी गयी है।

प्रयोग तथा गणना की विधि पूर्वकथित अनुसार ही रखी गई[1-3]।

सारणी 1

pH	$\bar{n}_A$	$\log \frac{\bar{n}_A - 1}{2 - \bar{n}_A}$	$\log \frac{\bar{n}_A}{1 - \bar{n}_A}$	(बिन्दुशः) $\log K_1^H$	$\log K_2^H$
2.4	1.60	+0.176			2.58
2.6	1.48	−0.038			2.57
2.8	1.42	−0.140			2.66
3.0	1.33	−0.307			2.69
3.2	1.26	−0.454			2.74
3.4	1.18	−0.658			2.74
3.6	1.13	−0.815			2.78
4.0	1.10				
5.0	1.10				
6.0	1.10				
7.0	1.10				
8.0	1.10				
9.0	1.10				
10.0	1.00				
10.5	0.97		+1.509	12.01	
10.6	0.95		+1.278	11.88	
10.7	0.93		+1.123	11.82	
10.8	0.89		+0.908	11.70	
10.9	0.87		+0.825	11.72	
11.0	0.83		+0.688	11.68	
11.1	0.77		+0.504	11.60	

परिणाम तथा विवेचन

इरविंग-रोसोटी समीकरण का उपयोग nA, n, तथा $P(L)$ कि गणना के लिए किया गया। nA, n तथा $P(L)$ की गणना में अनुमापन के समय में NaOH विलयन मिलाने पर होने वाले आयतन

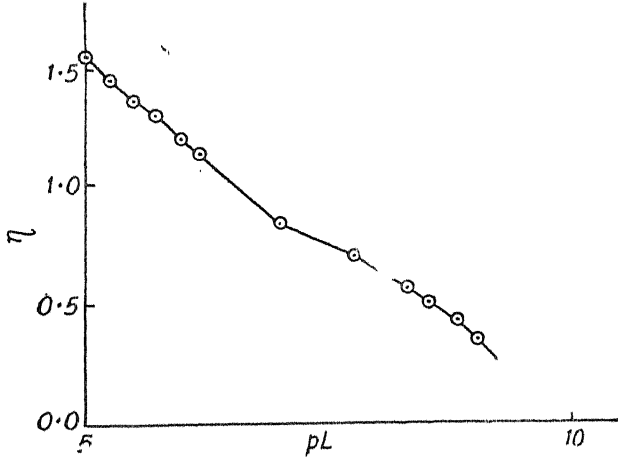
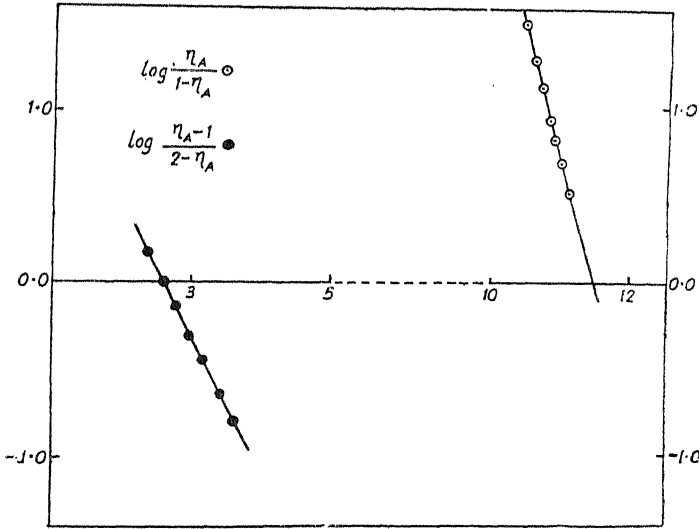
सारणी 2

$\bar{n}_A$	$\bar{n}$	$\log \frac{\bar{n}}{1-\bar{n}}$	$\log \frac{\bar{n}-1}{2-\bar{n}}$	$p(L)$	(बिन्दुश:) $\log K_1$	$\log K_2$
1.067	0.353	−0.263		9.07	8.81	
1.065	0.425	−0.131		8.84	8.71	
1.063	0.504	+0.007		8.57	8.58	
1.062	0.570	+0.122		8.35	8.47	
1.069	0.703	+0.374		7.87	8.25	
1.064	0.851	+0.759		7.12	7.88	
1.055	1.155		−0.736	6.22		5.48
1.053	1.203		−0.594	5.99		5.40
1.054	1.302		−0.363	5.76		5.39
1.052	1.379		−0.214	5.52		5.31
1.051	1.442		−0.101	5.28		5.18
1.055	1.563		+0.110	5.04		5.15

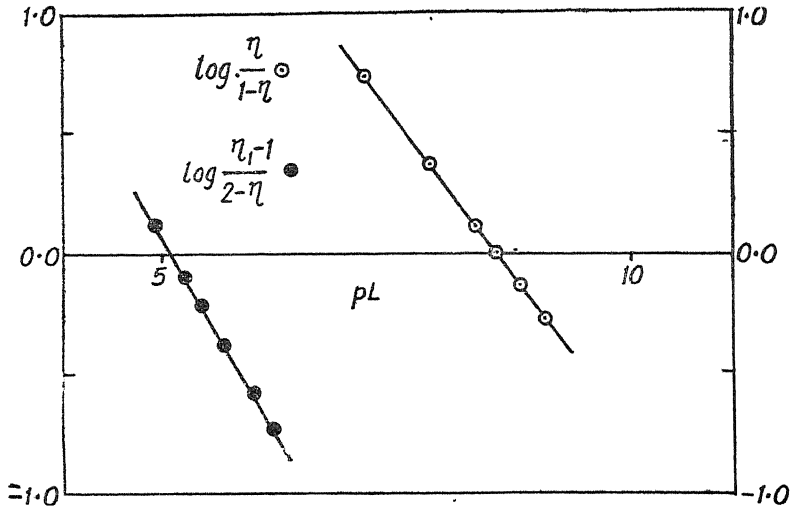
सारणी 3

विधि	$\log pK_1^H$	$\log pK_2^H$	$\log K_1$	$\log K_2$
अर्ध समाकल	11.63	2.57	8.55	5.15
बिन्दुश: गणना	11.76	2.68	8.45	5.32
रेखीय-ग्रारेख	11.46	2.62	8.55	5.20
न्यूनतम-वर्ग	—	—	8.50	5.26
औसत मान	11.61	2.62	8.51	5.23

परिवर्तन के कारण सांद्रण परिवर्तन की त्रुटि को ध्यान में रखा गया। विभिन्न B-मान (पी एच-मापी पाठ्यांक) के संगत $\bar{n}_A$, $\bar{n}$ तथा $P(L)$ के मान की गणना कर लिगैन्ड तथा संकर के संभवन-वक्र क्रमश: $\bar{n}_A$ विपक्ष p^H तथा $\bar{n}$ के समाकल मान से $\log pk_1^H$ $\log pk_2^H$ तथा $\log k_1$, $\log k_2$ के मान प्राप्त कर

सारणी 3 में अंकित किये गए। बिन्दुशः गणना तथा (चित्र 3-4) रेखीय आरेख विधि का उपयोग कर संशोधित मान प्राप्त किये गये। $\log k_1$ तथा $\log k_2$ के लिए न्यूनतम-वर्ग विधि का भी उपयोग किया गया।

चित्र 2 Tl(I)-5-क्लोरो सैलिसिलेट का संभवन वक्र

चित्र 3 प्रोटॉन लिगैन्ड संभवन स्थिरांक

सारणी 2 (चित्र-2) देखने से स्पष्ट होता है कि $\bar{n}$ का मान 1.6 से अधिक नहीं होता, जो यह प्रकट करता है कि Tl(I), 5- क्लो० से० अ० के साथ 1:1 तथा 1:2 संकर बनाता है। Tl(I) की बहुत कम सांद्रता (1×10^{-4} M) को ध्यान में रखते हुए बहु-नाभिक स्पीशीज की संभावना को निरस्त किया

जा सकता है । धातु तथा लिगैन्ड के विभिन्न अनुपात में किए गए अनुमापनों से स्पष्ट होता है कि संभवन स्थिरांक धातु आयन सांद्रता पर निर्भर नहीं करते ।

चित्र 4 Tl(I)-5-क्लोरो सैलिसिलेट के संभवन स्थिरांक

$\log k_1/\log k_2$ का अनुपात घनात्मक है तथा प्रथम एवं द्वितीय संभवन स्थिरांक का पृथक्करण गुणक अनुमानित परास में है। $\log k_1$ तथा $\log k_2$ का अधिक अन्तर तथा $\log k_1/k_2$ का अधिक मान Tl(I) आयन को जुड़ने वाले दूसरे लिगैन्ड के लिए संभावित त्रिविम-विन्यासी बाधा के कारण है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक, प्राचार्य श्री एन० एम० दुबे एवं डा० पी० जी० संत द्वारा दी गई सुविधा तथा वि० अ० आ० द्वारा दिये गये अनुसंधान अनुदान के लिए आभारी है।

निर्देश

1. खड़ीकर, पी० वी० तथा अमेरीआ, आर० एल०, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1973, **50**, 389.
2. खड़ीकर, पी० वी०, पूनिया, एन० एस० तथा कक्कर, एस० एन०, **इन्डियन जर्न० केमि०**, 1973 **11**, 709.
3. खड़ीकर, पी० वी० तथा अमेरीआ, आर० एल०, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1972, **49**, 1049.
4. इरविंग, एच० एम० तथा रोसोटी, एच० एस०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1954, 2904.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 2, April, 1976, Pages 131-136

उत्पादन समस्या से सम्बद्ध एक समाकल समीकरण

एस० एल० कल्ला तथा ए० बैटिग
टुकुमान नेशनल यूनिवर्सिटी, टुकुमान, अर्जेंटिना

[प्राप्त—अक्टूबर 7, 1975]

सारांश

यहाँ पर हम इस प्रश्न पर विचार करेंगे कि यदि अवमूल्यन के कारण होने वाली हानि ज्ञात हो तो समय के फलन के रूप में उस वस्तु के उत्पादन को किस प्रकार परिवर्तित होना चाहिए यदि उत्पाद कुल मात्रा का मान स्थिर बनाये रखना अभीष्ट है। इस प्रश्न से सम्बन्धित समाकल समीकरण को संकलन विभागों के माध्यम से हल किया गया है। हानि फलन को चार्लियर के बहुपदों द्वारा प्रदर्शित किया गया है और कुछ विशिष्ट दशाओं का उल्लेख हुआ है।

Abstract

On an integral equation associated with a production problem. *By* S. L. Kalla and A. Battig, Facultad de Giencias Exactas *y* Tecnologia, Universidad Nacional de Tucuman, Tucuman, Argentina.

We consider the problem that how must the production of certain item vary as a function of time, if for known losses due to depreciation the total amount of the product is to have a constant value. The integral equation associated with the problem is solved by an appeal to the convolution quotients. Loss function is represented by the Charlier's polynomials and some special cases are mentioned.

1. विषय प्रवेश

प्रस्तुत शोध पत्र में हम इस समस्या पर विचार करेंगे कि किसी एक वस्तु (item) का उत्पादन समय के फलन के रूप में किस प्रकार परिवर्तित होना चाहिए, यदि अवमूल्यन के कारण हाने वाली ज्ञात हानियों के सहित उत्पाद की कुल मात्रा को एक स्थिर मान प्राप्त करना हो। माना कि प्रारम्भ में $(t=0)$ अप्रयुक्त उत्पाद की कुल मात्रा L है और उत्पादन की ऐसी व्यवस्था करनी है कि यह मात्रा

स्थिर बनी रहे। माना कि हानि फलन $f(t)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। यह $t \geqslant 0$ के लिये परिभाषित है और इसका निम्नांकित तात्पर्य है। $L f(t)$ द्वारा अवमूल्यन से होने वाली हानि की मात्रा सूचित होगी यदि $t>0$ के लिये कोई उत्पादन नहीं होता काफी लम्बी अवधि के दौरान, यह चुक जाती है, अर्थात्

$$\int_0^\infty L f(t)\, dt = L \tag{1}$$

या

$$\int_0^\infty f(t)\, dt = 1 \tag{2}$$

उत्पादन फलन $\widetilde{g(t)}$ से समय t पर प्रति इकाई समय पर उत्पादन का बोध होता है। इस प्रकार से समयान्तराल $(x, x+dx)$ $g(x)\,dx$ के समतुल्य होता है। अतः परवर्ती क्षण t पर क्षति $g(x)f(t-x)dx$ होगी। इस क्षति की पूर्ति होनी चाहिए अतः

$$\int_0^t f(t-x)\, g(x)\, dx \tag{3}$$

यह क्षति है जिसकी पूर्ति समय t तक होनी है। इस तरह उत्पादन और हानि का अन्तर

$$g(t) - \int_0^t f(t-x)\, g(x)\, dx, \tag{4}$$

हानि $Lf(t)$ के तुल्य होना चाहिये। अतः

$$g(t) - \int_0^t f(t-x)\, g(x)\, dx = L f(t). \tag{5}$$

यहाँ पर हम ऐसी दशा की विवेचना करेंगे, जहाँ हानि फलन $f(t)$ को चार्लियर के बहुपदी [2] द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। चार्लियर द्वारा प्रचारित बहुपदी लाम्बिक बहुपदी हैं जो प्रायिकता सिद्धान्त में पायसां की विरल घटनाओं के वितरण से सम्बद्ध हैं। इन्हें निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है।

$$C_n(m; t) = \frac{m!}{t^m} \triangle^n \left[\frac{t^{m-n}}{(m-n)!}\right], \; t>0, \; m=0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

$$= \frac{m!\,(t)^{-n}}{(m-n)!} \Phi(-n, m-n+1; t) \tag{7}$$

जहाँ $\triangle$ परिमित अन्तरों वाला आपरेटर है, $\triangle f(x) = f(x+1) - f(x)$ तथा $\triangle^{n+1} f(x) = \triangle[\triangle_u f(x)]$, $n=1, 2, \ldots$। चार्लियर बहुपदी सार्वीकृत लागेर बहुपदी से निम्न प्रकार सम्बन्धित हैं :

$$C_n(m, t) = n!\,(t)^{-n}\, L_n^{m-n}(t) \tag{8}$$

इस प्रश्न का हल मिकुसिंस्की के आपरेटरों [8, 9] के पुनरावेदन द्वारा प्राप्त किया जाता है। कतिपय विशिष्ट दशाओं का उल्लेख किया जा रहा है।

2. संवलन विभाग

आइये स्थानिकतः समाकलनीय फलनों के एक सेट C पर विचार करें[3] । हम किन्हीं दो अवयवों $f, g \in C$ के लिये योग के तथा संकलन गुणनफल के संकारकों (आपरेटरों) को निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं ।

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t) \tag{9}$$

$$f*g=\int_0^t f(t-x)\, g(x)\, dx \tag{10}$$

अब हम संवलन विभाग $f(g)$ को सन्निविष्ट करते हैं, बहुत कुछ उसी ढंग से जिस प्रकार परिमेय संख्यायें पूर्णाकों के विभागों के रूप में सन्निविष्ट की जाती हैं । इन अवयवों का समुच्चय (सेट) संकलन क्षेत्र F कहलाता है ।

F के अवयवों की सत्ता होती है जिन्हें चित्रों के रूपों में वर्णित नहीं किया जा सकता । F के कुछ अवयव संख्याओं के संगत होते हैं तो कुछ संतत अथवा असंतत फलन होते हैं । अवकलन तथा समाकलन के आपरेटर भी इसी क्षेत्र से सम्बद्ध हैं । संकलन विभागों को या तो सार्वीकृत फलनों के रूप में अथवा आपरेटरों के रूप में माना जा सकता है ।

इसकी संपुष्टि करना सरल है कि सेट C के सभी अवयव क्षेत्र F से सम्बन्धित हैं किन्तु क्षेत्र F में कुछ ऐसे अवयव भी होते हैं जो C मे सम्बन्धित नहीं हो सकते । उदाहरणार्थ अवयव $\delta(t)$ द्वारा

$$f(t) * \delta(t)=f(t). \tag{11}$$

की पुष्टि होती है । वास्तव में गुण (11) डिरैक के δ फलन के संगत है । इस प्रकार $\delta(t)\, f \in C$ के लिये संवलन विभाग f/f है ।

परिभाषा के अनुसार हेवीसाइड का एकक फलन है :

$$u(t)=1 \quad t \geqslant 0$$

$$u^2(t)=u(t) * u(t)=t$$

और आगमन द्वारा

$$u^n=\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} \tag{12}$$

यह देखा जा सकता है कि u से स्वतन्त्र चर t विलग कर दिया गया है, मिकुसिन्स्की के सिद्धान्त [9] में यह संकेतन सूचित करता है कि हम फलन के किसी विशेष मान का उल्लेख नहीं कर रहें, वरन् हम फलन को समग्र इकाई के रूप में मान रहे हैं । इस पर μ को एक समाकलन का संकारक माना जा सकता है तथा μ^n समाकलन की n आकृतियों के संगत है ।

चूँकि प्रत्येक $f \in C$ के लिये $f/f=\delta$, अतः हमें

$$u/u=\delta \text{ अथवा } u * u^{-1}=\delta \tag{13}$$

प्राप्त होता है जो

$$u * s=\delta \quad (u=\frac{1}{s} * \delta \tag{14}$$

तथा
$$u^{-1}=s \tag{15}$$

हो जाता है।

सम्बन्ध (15) को नवीन आपरेटर की परिभाषा मान लिया गया है।

इससे यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि s अवकलन के संकारक के संगत है। यह सिद्ध किया जा सकता है [3] कि $f \in C$ के किसी अवयव के लिये, जिसका n कोटि का स्थानिक समाकलनीय अवकलज है,

$$s^n=f^{(n)}+s^0 f^{(n-1)}(0)+sf^{(n-2)}(0) \dots + s^{n-1} f(0), \tag{16}$$

जहाँ $f^{(n)}$ सामान्य अवकलज हैं। यह अवयव f का n कोटि का विस्तीर्ण अवकलज कहलाता है।

संकलन विभाग के क्षेत्र में जहाँ सामान्य अवकल समीकरणों तथा समाकल समीकरणों के साथ संकारक s की महत्वपूर्ण भूमिका होती है सन्निहित फलनों को संकारक s के पदों में अंकित करते हैं जिससे विश्लेषण कार्य सरल और सशक्त हो जाता है [5, 6, 7]।

संकलन विभागों (अथवा वितरणों या सार्वीकृत फलनों) को हम क्षेत्र F में अवयव के रूप में पुकारेंगे। इस क्षेत्र F में समस्त समीकरण

$$f * \xi=g \ (f, g \in c) \tag{17}$$

हल करने योग्य हैं और अद्वितीय हल को सांकेतिक रूप में

$$\xi=g/f. \tag{18}$$

द्वारा व्याक्त करते हैं।

3. **हल:** समीकरण 5 को

$$g * \delta-f * g=Lf \tag{19}$$

के रूप में लिखा जा सकता है इसीलिये

$$\begin{aligned} g&=L f/\delta-f \\ &=Lf * \left(\frac{\delta}{\delta-f}\right) \\ &=Lf * (\delta+r) \\ &=L(f+f * r) \end{aligned} \tag{20}$$

और फल [4] के बल पर

$$\frac{\delta}{\delta-f}=\delta+r \tag{21}$$

जहाँ r f के विभेदक अष्टि (resolvent kernel) स्वरूप है। विभेदक अष्टि [4] की परिभाषा के अनुसार अष्टि $r=f+f*r$ अतः हमें

$$g=L\,r(t)$$
$$=L[f_1(t)+f_2(t)+\dots\dots] \tag{22}$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$f_1(t)=f;\ f_i=f*f_{i-1}\ (i=2, 3, \dots).$$

क्षति फलन को निम्नवत् प्रदर्शित करते हैं :

$$f(t)=\frac{\beta^n\,\alpha^{1+m}}{\Gamma(1+m)\,(\alpha-\beta)^n}\,e^{-\alpha t}\,t^m\,C_n(m;\beta\,t), \tag{23}$$
$$m=0, 1, 2, \dots;\ \beta, t>0.$$

इसकी पुष्टि सुगमता से हो सकती है कि फलन $f(t)$ प्रतिबन्ध (2) की तुष्टि करता है। अब हम फलन $f(t)$ को आपरेटर s के पदों में लिखेंगे। हमें ज्ञात है कि [1]

$$f(t)\leftrightarrow\frac{\alpha^{1+m}}{(\alpha-\beta)^n}\,(s-\beta+\alpha)^n\,(s+\alpha)^{-m-1} \tag{24}$$

तथा इसकी i वीं पुनरावृत्त अष्टि

$$\frac{\alpha^{i+im}}{(\alpha-\beta)^{in}}\,s-\beta+\alpha)^{ni}\,(s+\alpha)^{-mi-i}\leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha^{i(1+m)}\,\beta^{ni}}{\Gamma(mi+i)\,(\alpha-\beta)^{ni}}\,e^{-\alpha t}\,t^{mi+i-1}\,C_{ni}(mi+i-1);\ \beta t) \tag{25}$$

है। अतः

$$g(t)=L\,r(t)$$
$$=L\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha^{i+mi}\,\beta^{ni}}{\Gamma(mi+i)\,(\alpha-\beta)^{ni}}\,e^{-\alpha t}\,t^{mi+i-1}\,C_{ni}(mi+i-1;\beta\,t). \tag{26}$$

4. विशिष्ट दशायें

यहाँ पर हम अपने सामान्य फल (26) की कुछ विशिष्ट दशाओं का उल्लेख करेंगे :

(*i*) यदि हम $n=0$ रखें तो $C_0(m;t)=1$, तथा फलस्वरूप क्षति फलन (23) प्वायसाँव के वितरण फलन में समानीत हो जाता है अर्थात्

$$f(t)=\frac{\alpha^{1+m}\,e^{-\alpha t}\,t^m}{\Gamma(1+m)}\ . \tag{27}$$

इस क्षति फलन का हल निम्न प्रकार हो जाता है :

$$g(t)=L\alpha\sum\frac{(\alpha t)^{mi+i-1}\,e^{-\alpha t}}{\Gamma(mi+i)}\,. \tag{28}$$

इस दिशा की विवेचना निर्देश [4] में की गई है।

(*ii*) यदि हम सम्बन्ध (8) का उपयोग करें तो हानि फलन को सार्वीकृत लागेर बहुपदी [2] के पदों में व्यक्त किया जा सकता है जिसके परिणामस्वरूप हाल ही में कल्ला द्वारा दिया गया फल [7] प्राप्त होता है

(iii) यदि हम $n=1$ रखें तो

$$C_1(m;\,\beta t)=\frac{\beta t-m}{\beta t}$$

परिणाम के बल पर हानि फलन

$$f(t)=\frac{\alpha^{1+m}\,(\beta t-m)\,e^{-\alpha t}\,t^{m-1}}{\Gamma(1+m)\,(\alpha-\beta)}$$

हो जाता है और संगत हल को परिणाम (26) से निगमित किया जा सकता है।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Tables of Integral Transforms. मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1954.
2. वही, Higher Transcendental Functions. भाग II, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1954.
3. एर्डेल्यी, ए०, Operational Calculus and Generalized Functions. होल्ट राइन हार्ट तथा विंस्टन न्यूयार्क, 1966.
4. फेन्यो, एस० तथा फ्रे, टी०, Modern Mathematical Methods in Technology. भाग I, नार्थ हालैंड पब्लिशिंग कम्पनी, अमस्टर्डम, 1962.
5. कल्ला, एस० एल० तथा बैटिंग, ए० Rev. Bra. de Fsica, 1974.
6. कल्ला, एस० एल० तथा वैलेंटीनुजी, एम० ई० (प्रकाशनाधीन)
7. कल्ला, एस० एल० (प्रकाशनाधीन)
8. लेबेडेव, एन० एन०, Special Functions and Their Applications. प्रेंटिसहाल, 1965
9. मिकुसिस्की, जे० जी०, Operational Calculus. परगमान प्रेस, न्यूयार्क 1959

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No 2, April, 1976, Pages 137-141

कुछ धातु लैक्टेटों के अवरक्त स्पेक्ट्रमों का अध्ययन

पी० बी० चक्रवर्ती
रसायन विभाग, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

तथा

एच० एन० शर्मा
माधव विज्ञान महाविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—अक्टूबर 8, 1975]

सारांश

Al(III). In(III),Ti(III), Cr(III) तथा Fe(III) के लैक्टिक अम्ल के साथ बने 1:3 संकुलों के अवरक्त स्पेक्ट्रमों का अध्ययन किया गया। सभी संकुलों में धातु और ऑक्सीजन बंध की आवृति $\approx 650 cm^{-1}$ पर पायी गयी। सभी संकुलों में हाइड्राक्सिल और कार्बोनिल समूहों की आवृतियों में पर्याप्त परिवर्तन पाया गया जो यह बताता है कि संकुलींकरण लिगैंड के हाइड्रॉक्सिल एवं कार्बोनिल समूहों से होता है। लैक्टिक अम्ल में $1730 cm^{-1}$ पर प्राप्त $C{=}O$ आवृति इन संकुलों में $\approx 1600 cm^{-1}$ पर प्रतिस्थापित हो जाती है, जिससे $M{-}O$ बंध के आयनिक होने का संकेत मिलता है। इसकी पुष्टि इन संकुलों के निर्माण के एन्थाल्पी परिवर्तन के मानों से भी होती है, जो $-4{\cdot}8$ से $-1{\cdot}8$ कि०कै०/मोल के बीच पाये गये हैं। $3570 cm^{-1}$ के निकट बैंड के साथ ≈ 1660 और $\approx 1640 cm^{-1}$ पर बैंडों की प्राप्ति इन संकुलों में जालक-जल की उपस्थिति का भी संकेत देती है। विभवमापी अध्ययनों, विश्लेषण आँकड़ों और अवरक्त स्पेक्ट्रमों के आधार पर इन संकुलों की संरचना भी प्रस्तावित की गयी है।

Abstract

Study of IR spectra of some metal-lactates. *By* P. B. Chakrawarti, Chemical Laboratories, Moti Lal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal and H. N. Sharma. Madhav Vigyan Mahavidyalaya, Ujjain.

IR spectra of 1:3 comlexes of Al(III), In(III), Ti(III), Cr(III) and Fe(III) with lactic acid have been given. In all these complexes the metal to oxygen frequency is suggested to appear at $\approx 650 cm^{-1}$. Considerable shift in both hydroxyl

and carbony group frequencies is obtained in all these complexes, indicating that the complexation has taken place through hydroxyl and carbonyl group of the ligand. The absorption band near $\approx$1600cm^{-1} for these complexes corresponds to $C=O$ as symmetric stretching due to COO^- anion, shifted from 1730 cm^{-1} in lactic acid for COOH group. This suggests ionic nature of $M-O$ link in these complexes. This finds support in the values of negative enthalpies for these complexes. A band at$\approx$3570cm^{-1} along with absorption bands at $\approx$1660 and $\approx$1640 cm^{-1} indicate possibility of lattice water. On the basis of IR, potentiometric studies and analytical data the structures of these complexes have also been suggested.

लैक्टिक अम्ल और इसके द्विसंयोजक धातुओं के साथ संकुलों के अवरक्त स्पेक्ट्रम का अध्ययन अनेक शोधकर्ताओं ने प्रस्तुत किया है ।[1–4] प्रस्तुत प्रपत्र में कुछ त्रिसंयोजी धातु आयनों के साथ लैक्टिक अम्ल के संकुलों के अवरक्त स्पेक्ट्रमों का अध्ययन प्रस्तुत किया गया है । साथ ही इन संकुलों के लिये एक सामान्य संरचना-सूत्र भी प्रस्तावित किया गया है ।

प्रयोगात्मक

सावधानीपूर्वक शोधित पदार्थों के अवरक्त स्पेक्ट्रम KBr-डिस्क विधि से पर्किन-एल्मर, मॉडल 237, स्पेक्ट्रममापी द्वारा प्राप्त किये गये ।

धातुओं के 1:3 संकुल बनाने के लिये लैक्टिक अम्ल और धातु के समअणुक विलयन 3:1 अनुपात में (लैक्टिक अम्ल कुछ आधिक्य में) लिये गये और उन्हें 6 घंटे तक पश्चवाहित किया गया । इसके बाद विलयनों को प्रारंभिक आयतन के $\frac{1}{3}$ आयतन तक वाष्प ऊष्मक पर सांद्रित किया गया और संकुलों को निर्वात फिल्टरन द्वारा पृथक किया गया । लिगैंड के आधिक्य को ईथर द्वारा धोकर पृथक किया गया और संकुल निर्वात में सुखाये गये । संकुलों में धातुओं का निर्धारण EDTA-अनुमापनों के द्वारा और जल का निर्धारण संकुलों को 115°—120°C ताप तक गर्म करने पर भार में होने वाली कमी से किया गया ।

परिणाम तथा विवेचना

वैश्लेषिक आँकड़ों (सारणी 1) से इन संकुलों के [M(Mand)$_3$] ; 3H_2O सूत्र की पुष्टि होती है । संकुलों से प्रमुख अवरक्त-बैंड सारणी 2 में दिये गये हैं । तुलना के लिये लैक्टिक अम्ल के अवरक्त-बैंड भी साथ में दे दिये गये हैं ।

सारणी 1

वैश्लेषिक परिणाम

क्रमांक	संकुल	लिया गया भार ग्रा०	धातु का प्रशित प्राप्त	धातु का प्रशित परिकलित	जल का प्रतिशत प्राप्त	जल का प्रतिशत परिकलित
1.	[Ti(Mand.)$_3$] . 3H_2O	0·2	13·10	12·98	14·48	14·63
2.	[Cr(Mand.)$_3$] . 3H_2O	,,	14·07	13·95	14·36	14·48
3.	[Fe(Mand.)$_3$] . 3H_2O	,,	14·97	14·82	14·30	14·33
4.	[Al(Mand.)$_3$] . 3H_2O	,,	7·80	7·74	15·35	15·49
5.	[In(Mand.)$_3$] . 3H_2O	,,	26·58	26·34	12·28	12·39

सारणी 2

धातु लैक्टेटों के प्रमुख अवरक्त-बैंड

क्रमांक	ν(M—O)	ν(OH)	ν(CO) (COOH)	ν asymm. (C-O)	ν symm. (C-O)	$\Delta\nu$ $(\nu_1-\nu_2)$	$\nu(H_2O)$	$\delta\gamma(H_2O)$
लैक्टिक अम्ल		3600	1730(vs)		1375(M)			
1.	650(*s*)	3100—3580(*s,b*)		1580(vs)	1380(M)	200	1640(W)	935(M)
2.	650(s)	3100—3590(s,b)		1590(vs)	1380(s)	210	1660(s)	920(W)
3.	650(s)	3300—3550(s,b)		1600(vs)	1380(s)	220	1660(s)	1025(W)
4.	655(s)	3200—3580(s,b)		1610(vs)	1380(s)	230	1666(s)	960(M
5.	650(s)	2900—3580(s,b)		1585(s)	1370(s)	215	1640(s)	985(vs)

नोट—पहले स्तंभ में दिये गये क्रमांक सारणी 1 में इन क्रमांकों पर दिये गये यौगिकों से नामों को प्रदर्शित करते हैं।

सारणी 2 को देखने से स्पष्ट है कि हाइड्रॉक्सिल और कार्बोनिल दोनों समूहों की आवृतियों में, मुक्त लैक्टिक अम्ल में प्राप्त आवृतियों से पर्याप्त परिवर्तन हो जाता है। -OH समूह की तनन आवृतियाँ (stretching frequency) जबकि फैल जाती है, कार्बोनिल तनन आवृति सभी संकुलों में $\approx$1600 cm^{-1} पर प्राप्त होती है (लैक्टिक अम्ल में यह आवृति 1725 cm^{-1} पर प्राप्त होती है)। इससे यह स्पष्ट संकेत मिलता है कि संकुलीकरण लिगैंड के हाइड्राक्सिल और कार्बोनिल समूहों के माध्यम से होता है। इस तथ्य की पुष्टि विभवमापी अध्ययनों से भी होती है[5-7] जो बताते हैं कि लैक्टिक अम्ल के प्रत्येक अणु के संकुलीकरण के समय केवल एक (कार्बोक्सिलिक) प्रोटॉन मुक्त होता है।

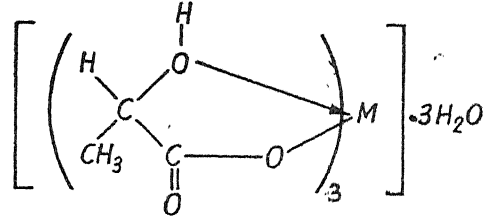
$\approx$1650 cm^{-1} पर बैंड के साथ-साथ 3570 cm^{-1} और $\approx$950 cm^{-1} पर बैंडों की प्राप्ति इन संकुलों में जालक जल की उपस्थिति का संकेत देती है।[8]

संकुल बनने पर, धातु आयन से उपसहसंयोजित C—O बंध लम्बा हो जाता है और दूसरा छोटा रहता है। इसीलिये असममित (O—C—O) बैंड उच्च आवृति की ओर और सममित-तनन बैंड निम्न आवृति की ओर सरक जाता है।

स्पेक्ट्रमों में COO⁻ समूह के असममित और सममित तनन-बैंड अपनी आवृतियों में परिवर्तन का कोई निश्चित क्रम प्रस्तुत नहीं करते। असममित और सममित COO⁻ तनन-आवृतियों के बीच आवृति

पृथक्करण ($\triangle\nu$) 200-230 cm^{-1} के बीच में परिवर्तन होता है। यह तथा 1730 cm^{-1} के स्थान पर असममित और सममित >C=O तनन-आवृतियों के कारण, क्रमशः $\approx$1600 cm^{-1} तथा $\approx$1380 cm^{-1} पर दो अवशोषण की प्राप्ति इन यौगिकों में धातु और लिगैंड बंध का आयनिक होना बताते हैं[9,10,11]। इसकी पुष्टि हमारे द्वारा पूर्वसूचित, इन यौगिकों के निर्माण के एन्थाल्पी-परिवर्तन के मानों[5-7] से भी होती है, जो $-4{\cdot}8$ से $-1{\cdot}8$ कि० कै०/मोल के बीच हैं; जबकि बंध में पर्याप्त सह-संयोजक गुण के लिये थाल्पी-परिवर्तन का मान -5 कि० कै०/मोल से कम होना चाहिये।[12-13]

धातु से ऑक्सीजन बंध की तीव्रता $\approx$650 cm^{-1} पर होती हैं(वीसबर्गर[14])।

वैश्लेषिक आँकड़ों, विभवमापी अध्ययनों और प्रस्तुत अवरक्त स्पेक्ट्रमों के आधार पर इस शोध पत्र में विवेचित संकुलों के लिये निम्नांकित सामान्य-संरचना प्रस्तावित की जा सकती है :

जहाँ, $M=Ti^{3+}$, Cr^{3+}, Fe^{3+}, Al^{3+} या In^{3+} है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक विभिन्न संकुलों के IR निकालने के लिये भारत हेवी इलेक्ट्रिकल्स, भोपाल के डॉ० वी० एस० मेहता तथा शोध के लिए सुविधाएँ प्रदान करने के लिए डॉ० एस० एन० कत्रीश्वर के आभारी हैं।

निर्देश

1. जेक्स बोलार्ड, **जर्न० केमि० फिजि०**, 1965, **62**, 887.
2. बटलर, आर० डी० तथा सहयोगी, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1965, **87(24)**,5597
3. फिशिजर, ऐन्ड्रूज, **कना० जर्न० केमि०**, 1969, **47**(14), 2629.
4. असानो, **युजरू केम० एब०**,1 970, **72**, 94/33C
5. चक्रवर्ती, पी० बी० तथा शर्मा, एच० एन०, **विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका**, 1974, **17**(1), 53; 1975, **18**(2), 169.
6. चक्रवर्ती, पी० बी० तथा शर्मा, एच० एन०, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०** (प्रकाशनाधीन)
7. चक्रवर्ती, पी० बी० तथा शर्मा, एच० एन०, **जर्न०इन्डि० केमि० सोसा०** (प्रकाशनाधीन)

8. मिलर, एफ० ए० तथा विल्केन्स, सी० एच०, **एनालि० केमि०**, 1952, **24**, 1952.

9. डायर, जे० आर० 'Application of Spectroscopy of Inorganic Compounds, प्रेंटिस-हाल, II प्रिंगिग 1971, पृ० 46.

10. सॉयेर, डी० टी० तथा मेककिनी, जे० एम०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1960, **82**, 4191.

11. ऐजीकोव, बी० एस० तथा सहयोगी, **रशियन जर्न० इनआर्ग० केमि०**, 1968, **13**, 954.

12. मार्टेल, ए० ई०, **रेक्युइल**, 1956, **75**, 781.

13. कारिनी, एफ० एफ० तथा चार्ल्स० आर० जी०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1954, **76**, 2153, 5854.

14. वीसबर्गर, ए०, Techniques of Organic Chemistry, इन्टरसाइंस, 1956, भाग नं० IX.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 2, April, 1976, Pages 143-152

फूरियर-जैकोबो श्रेणी की नारलुण्ड संकलनीयता

एम० एम० शर्मा

आनन्द भवन, वररुचि मार्ग, उज्जैन

[प्राप्त—नवम्बर 25, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में फूरियर-जैकोबी श्रेणी के लिये नारलुण्ड संकलनीयता प्राप्त की गई है। प्राप्त परिणाम हसियांग के प्रमेय के संगत है जिसे उन्होंने फूरियर-त्रिकोणमितीय श्रेणी की नारलुण्ड संकलनीयता के लिये प्राप्त किया था।

Abstract

On Nörlund summability of Fourier-Jacobi series. *By* M. M. Sharma, Anand Bhawan, Bararuchi Marg, Ujjain.

In this paper we have obtained a result on Nörlund summability of Fourier-Jacobi series. The result obtained corresponds to a theorem of Hsiang proved for the Nörlund summability of Fourier-trignonometric series.

1. माना कि $\{p_n\}$ स्थिरांकों का अनुक्रम है, चाहे वे वास्तविक हों या संकर। हम लिखेंगे कि

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \dots \dots \dots + p_n \neq 0.$$

श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ संकलनीय (N, p_n) है जिसका योग S है (2, p. 64) यदि अनुक्रमानुसार रूपान्तरण जो

$$t_n = \frac{1}{P_n}\left(\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} S_k\right) = \frac{1}{P_n}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k S_{n-k}\right) \tag{1.1}$$

द्वारा व्यक्त होता है वह S की ओर अभिमुख हो ज्यों ज्यों $n \to \infty$ जहाँ $\{S_n\}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ के आंशिक योगफलों का अनुक्रम है।

(1.1) द्वारा परिभाषित संकलनीयता (N, pn) की विधि की नियमितता के प्रतिबन्ध हैं :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{P_n}=0 \tag{1·2}$$

तथा

$$\sum_{k=0}^{n} |p_k|=O\{|P_n|\} \tag{1.3}$$

ज्यों ज्यों $n\to\infty$.

यदि $\{p_n\}$ वास्तविक, अनृण अनुक्रम हो तो प्रतिबन्ध (1.3) स्वयमेव तुष्ट हो जाता है और उस दशा में संकलन (N, p_n) की विधि की नियमितता के लिए आवश्यक और प्रर्याप्त प्रतिबन्ध (1·2 होगा।

$p_n=\frac{1}{n+1}$ के लिये यह विधि सामान्य हार्मोनिक संकलनीयता या $\{S_n\}$ की (H) संकलनी (2, p.110) में समानीत हो जाती है।

2. माना कि $f(x)$ एक फलन है जो परिबद्ध अन्तराल $[-1, 1]$ में परिभाषित है जिससे कि फलन

$$(1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} f(x) \in L[-1, 1],$$

जहाँ $\alpha>-1$ तथा $\beta>-1$.

फलन $f(x)$ के संगत फूरियर-जैकोबी प्रसार को

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha, \beta)} (x), \tag{2.1}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है जहाँ

$$a_n=\frac{(2n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}} \cdot \frac{\Gamma(n+1)\, \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\, \Gamma(n+\beta+1)}\int_{-1}^{1} (1-y)^{\alpha} (1+y)^{\beta} f(y)\, P_n^{(\alpha, \beta)} (y)dy \tag{2.2}$$

श्रेणी (2.1) परागोलीय श्रेणी में समानीत हो जाती है यदि $\alpha=\beta=\lambda-\frac{1}{2}$ और लेगेण्ड्र श्रेणी में यदि $\alpha=\beta=0$.

आयंगर [4] ने फूरियर-त्रिकोणमिति श्रेणी की हार्मोनिक संकलनीयता के लिये एक फल सिद्ध किया जिसे सिद्दीकी [8] तथा पती [6] ने विभिन्न दिशाओं में सार्वीकृत किया है। सिद्दीकी के फल को उसके भी आगे सिंह [9] ने सार्वीकृत किया। उन्होंने निम्नांकित प्रमेय सिद्ध की।

प्रमेय A यदि

$$\int_0^t | \phi(u) | \,du=0\Big(\frac{t}{\log 1/t}\Big),$$

ज्यों ज्यों $t \to +0$, त्यों त्यों फलन $f(x)$ की फूरियर-त्रिकोणमितीय श्रेणी $f(x)$ में संकलनीय (N, p_n) है जहाँ $\{p_n\}$ एक अनृण तथा अवर्द्धमान अनुक्रम है जिससे कि

$$\sum_{k=a}^{n} \frac{p_k}{k \log k} = O(P_n)$$

जहाँ 'a' एक स्थायी धन पूर्णाङ्क है तथा $\phi(u) = [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)]$.

हाल ही में फल का सार्वीकरण करते हुये हसियांग [3] ने फूरियर-त्रिकोणमितीय श्रेणी की नारलुण्ड संकलनीयता पर निम्नांकित प्रमेय को सिद्ध किया है ।

प्रमेय B

माना कि (N, p_n) एक नियमित नारलुण्ड विधि है जिसे वास्तविक संख्याओं $\{p_n\}$ के एक अनृण एकदिष्ट अवर्द्धमान श्रेणी के अनुक्रम द्वारा परिभाषित किया जाता है जिससे कि $P_n \to \infty$ ज्यों ज्यों $n \to \infty$ तथा माना कि $\psi(t)$ ऐसा धन एकदिष्ट वर्द्धमान फलन है कि $\psi(n+1) \geqslant \psi(n)$.

यदि

$$\psi(n) \log n = O(P_n)$$

ज्यों ज्यों $n \to \infty$,

तथा
$$\int_0^t |\phi(u)|\, du = 0\left(\frac{\psi(\tau)\, t}{P_\tau}\right)$$

ज्यों ज्यों $t \to +0$, तो $f(t)$ की फूरियर श्रेणी $t=x$, पर S से संकलनीय (N, p_n) है जहाँ $\phi(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2S$ तथा τ $1/t$. का समाकल अंश है ।

रैखिक अन्तराल $[-1, 1]$ के अन्तिम बिन्दुओं पर फूरियर-जैकोबी श्रेणी की नारलुण्ड संकलनीयता के प्रसंग में गुप्ता [1] ने एक प्रमेय सिद्ध की है जो उपर्युक्त सिह् के प्रमेय A के संगत है । इस टिप्पणी में हम फूरियर-जैकोबी श्रेणी की नारलुण्ड संकलनीयता पर एक फल को सिद्ध करना चाहते हैं जो हसियांग के प्रमेय B के संगत है ।

इसे हम लिखेंगे
$$F(\phi) = [f(\cos\phi) - A]\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{2\beta+1}$$

तथा निम्नांकित प्रमेय सिद्ध करेंगे ।

प्रमेय

माना कि (N, p_n) एक नियमित नारलुण्ड विधि है जिसे गुणांकों $\{p_n\}$ की एक वास्तविक अनृण एकदिष्ट अवर्द्धमान श्रेणी से परिभाषित करते हैं जिससे कि $P_n \to \infty$ ज्यों ज्यों $n \to \infty$ तथा माना कि $\psi(t)$ एक धन एकदिष्ट वर्धमान फलन है कि $\psi(n+1) \geqslant \psi(n)$.

यदि $$n^{\alpha+1/2}=0(P_n)$$

ज्यों ज्यों $n\to\infty$, (2.3)

तथा $$\psi(n)\log n=O(P_n)$$

ज्यों ज्यों $n\to\infty$, तथा यदि (2.4)

$$F_1(t)=\int_0^t |F(\phi)|\,d\phi=O\left(\frac{\psi(\tau)t^{2\alpha+2}}{P_\tau}\right) \tag{2.5}$$

ज्यों ज्यों $t\to0$ तो श्रेणी (2.1) योगफल A में बिन्दु $x=+1$ पर संकलनीय है बशर्ते $-\frac{1}{2}\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$, $\beta>-\frac{1}{2}$ तथा प्रतिपोल प्रतिबन्ध

$$\int_{-1}^{b}(1+x)^{\beta/2-3/4}|f(x)|\,dx<\infty \tag{2.6}$$

b स्थिर हो, तो तुष्ट होता है।

टिप्पणी : एक ऐसी प्रमेय अन्य बिन्दु के लिये अर्थात् $x=-1$ के लिये बताई जा सकती है। प्राचल α तथा β के मध्य पूर्ववत संशोधन करने होंगे।

3. प्रमेय की उपपत्ति को पूरा करने के लिये हमें निम्नांकित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका 1 (1, p. 79).

माना कि

$$N_n(\phi)=\frac{2^{\alpha+\beta}}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_k\,\lambda_{n-k}\,P_{n-k}^{(\alpha+1,\,\beta)}(\cos\phi),$$

जहाँ $$\lambda_n=\frac{2^{-\alpha-\beta-1}\,\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}\cong\frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot n^{\alpha+1}.$$

$N_n(\phi)$ के लिये निम्नांकित कोटि अनुमान लागू होते हैं :

$0\leqslant\phi\leqslant\frac{1}{n}$ के लिये $|N_n(\phi)|=O(n^{2\alpha+2})$ (3.1)

$\frac{1}{n}\leqslant\phi\leqslant\pi-\frac{1}{n}$, $\alpha\geqslant-\frac{1}{2}$ के लिये

$$|N_n(\phi)|=\frac{1}{P_n}\,O\left[\frac{n^{\alpha+1/2}P_{(1/\phi)}}{\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{\alpha+3/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{\beta+1/2}}\right]+O\left[\frac{n^{\alpha-1/2}}{\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{\alpha+5/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{\beta+3/2}}\right] \tag{3.2}$$

$\pi-\frac{1}{n}\leqslant\phi\leqslant\pi$, $\alpha\geqslant-\frac{1}{2}$, $\beta>-\frac{1}{2}$ के लिये $|N_n(\phi)|=O(n^{\alpha+\beta+1})$ (3.3)

प्रमेयिका 2 (1, p. 81).

प्रतिपोल प्रतिबन्ध

$$\int_{-1}^{b} (1+x)^{\beta/2-3/4} | f(x) | \, dx < \infty$$

का अर्थ होगा

$$\int_{a=\cos^{-1} b}^{\pi} \left(\cos \frac{t}{2}\right)^{\beta-1/2} \; f(\cos t) - A \,|\, dt < \infty \tag{3.4}$$

जिससे भी यह अर्थ निकलता है कि

$$\int_{0}^{1/n} t^{\beta-1/2} \,| f(-\cos t) - A \,|\, dt = 0(1) \tag{3.5}$$

ज्यों ज्यों $n \rightarrow \infty$

4. आब्रेचकाफ (5, p. 99) का अनुसरण करने पर $x = +1$ पर श्रेणी (2.1) के nवें आंशिक योग को

$$S_n(1) = 2^{\alpha+\beta} \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha} \left(\cos \frac{\phi}{2}\right)^{2\beta} f(\cos \phi) \, S_n \,(1, \cos \phi) \sin \phi \, d\phi \tag{4.1}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ $(1, \cos \phi)$ से श्रेणी

$$\sum_{m} \frac{P_m^{(\alpha,\,\beta)}(1) \, P_m^{(\alpha,\,\beta)}(\cos \phi)}{g_m},$$

तथा

$$g_m = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \, \Gamma(m+\alpha+1) \, \Gamma(m+\beta+1)}{(2m+\alpha+\beta+1) \, \Gamma(m+1) \, \Gamma(m+\beta+1)}.$$

का nवाँ आंशिक योगफल व्यक्त होता है।

राव[7] ने दिखलाया है कि

$$S_n(1, \cos \phi) = \lambda_n \, P_n^{(\alpha+1,\,\beta)} (\cos \phi),$$

जहाँ

$$\lambda_n = \frac{2^{-\alpha-\beta-1} \, \Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1) \, \Gamma(n+\beta+1)} \cong \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot n^{\alpha+1}.$$

अत :

$$S_n(1) - A = 2^{\alpha+\beta} \, \lambda_n \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{\phi}{2}\right)^{2\beta+1} \left[f \cos \phi) - A \right] P_n^{(\alpha+1,\,\beta)} (\cos p) \, d\phi \tag{4.2}$$

$$= 2^{\alpha+\beta} \, \lambda_n \int_0^{\pi} F(\phi) \; P_n^{(\alpha+1,\,\beta)} \, (\cos \phi) \, d\phi$$

बिन्दु $x=+1$ पर श्रेणी (2.1) का नारलुण्ड माध्य $(N, p_n$

$$t_n=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k\, S_{n-k}(1).$$ होगा,

अथवा $$t_n-A=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k\,[S_{n-k}(1)-A]$$

$$=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k\, 2^{\alpha+\beta}\, \lambda_{n-k}\int_0^{\pi} F(\phi)\, P_{n-k}^{(\alpha+1,\,\beta)}(\cos\phi)\, d\phi$$

$$=\int^{\pi} F(\phi)\, N_n(\phi)\, d\phi \tag{4.3}$$

अब प्रमेय सिद्ध करने के लिये यह दिखाना होगा कि

$$I(\phi)=\int_0^{\pi} F(\phi)\, N_n(\phi)\, d\phi=0(1),$$ ज्यों ज्यों $n\to\infty$.

हम लिखेंगे

$$I(\phi)=\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi-1/n}+\int_{\pi-1/n}^{\pi},$$

जहां δ उपयुक्त स्थिरांक है

$$=I_1+I_2+I_3+I_4, \text{ (मानलें)} \tag{4.4}$$

(3.1) के प्रयोग से

$$|I_1|=O(n^{2\alpha+2})\int_0^{1/n}|F(\phi)|\, d\phi$$

$$=O(n^{2\alpha+2})0\left(\frac{\psi(n)}{P(n)\, n^{2\alpha+2}}\right)$$

$$=0\left(\frac{\psi(n)}{P_n}\right)$$

$$=0(1), \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty. \tag{4.5}$$

पुनः, (3.2) के प्रयोग से

$$|I_2|=O\left[\int_{1/n}^{\delta}|F(\phi)|\,\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\,P_{(1/\phi)}\sin(\phi)^{-\alpha-3/2}\, d\phi\right]$$

$$=O\left[\int_{1/n}^{\delta}|F(\phi)|\, n^{\alpha-1/2}\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-5/2} d\phi\right] \tag{4.6}$$

$$=J_1+J_2, \text{ मानलें}$$

अब $$|J_1|=O\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)\int_{1/n}^{\delta}\frac{|F(\phi)|\,P_{(1/\phi)}}{\phi^{\alpha+3/2}}\,d\phi$$

$$=O\left(\frac{n^{+1/2}}{P_n}\right)\left[0\left\{\frac{\psi(1/\phi)}{P_{(1/\phi)}}\,\phi^{2\alpha+2}\right\}\frac{P_{(1/\phi)}}{\phi^{\alpha+3/2}}\right]_{1/n}^{\delta}$$

$$+O\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)\int_{1/n}^{\delta}0\left(\frac{\psi_{(1/\phi)}}{P_{(1/\phi)}}\,\phi^{2\alpha+2}\left|\frac{d}{d\phi}\left(\frac{P_{(1/\phi)}}{\phi^{\alpha+3/2}}\right)\right|d\phi\right.$$

$$=J_{1\cdot1}+J_{1\cdot2}, \text{ मानलें} \tag{4.7}$$

अब

$$|J_{1\cdot1}|=O\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)\left[0(\psi(1/\phi)\ \phi^{\alpha+1/2})\right]_{1/n}^{\delta}$$

$$=0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)+0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)\psi(n)n^{-\alpha-1/2}$$

$$=0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)+0\left(\frac{\psi(n)}{P_n}\right)$$

$$=0(1)+0(1), \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty$$

$$=0(1) \tag{4.8}$$

पुनश्च : $$|J_{1\cdot2}|=O\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)\int_{1/n}^{\delta}0\left(\frac{\psi_{(1/\phi)}}{P_{(1/\phi)}}\,\phi^{2\alpha+2}\right)\left|\frac{d}{d\phi}\left(\frac{P_{1(\phi)}}{\phi^{\alpha+3/2}}\right)\right|d\phi$$

$$=0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)\int_{1/\delta}^{n}\left(\frac{\psi_{(x)}}{P_{(x)}}\,x^{-2\alpha-2}\right)\left|\frac{d}{dx}P_{(x)}\ x^{\alpha+3/2}\right|dx$$

$$=0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)\int_{1/\delta}^{a}\left(\frac{\psi_{(x)}}{P_{(x)}}\,x^{-2\alpha-2}\right)\left|\frac{d}{dx}P_{(x)}\ x^{\alpha+3/2}\right|dx$$

$$+0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)\int_{a}^{n}\left(\frac{\psi_{(x)}}{P_{(x)}}\,x^{-2\alpha-2}\right)\left|\frac{d}{dx}\ P_{(x)}\ x^{\alpha+3/2}\right|dx,$$

जहाँ $$a=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1.$$

$$=0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)+0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)\left[\sum_{a}^{n}\frac{\psi_{(k)}}{P_k}\frac{1}{K^{2\alpha+2}}\left|\triangle(P_k\,K^{\alpha+3/2})\right|\right]$$

$$=0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)+0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)\left[\sum_a^n \frac{\psi_{(k)}}{P_k}\cdot\frac{1}{K^{2\alpha+2}}\left(K^{\alpha+3/2}P_k-(K+1)^{\alpha+3/2}P_{k+1}\right)\right]$$

$$=0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)+0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)\left[\sum_a^n \frac{\psi_{(k)}}{P_k}\cdot\frac{P_k}{K^{\alpha+3/2}}\right]$$

$$+0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)\left[\sum_a^n \frac{\psi(k)}{P_k}\cdot\frac{1}{K^{\alpha+3/2}}\cdot(k+1)P_{k+1}\right]$$

$$=0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)+0\left(\frac{n^{+1/2}}{P_n}\right)\left[\sum_a^n \frac{P_k}{\log k\ .\ k^{\alpha+3/2}}\right]$$

$$+0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)+0\left[\sum_a^n \frac{P_{k+1}}{\log k\, k^{\alpha+3/2}}\right]$$

$$=0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)+0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)O\left(\frac{P_n}{\log n\ n^{\alpha+3/2}}\right)$$

$=0(1)+0(1)$, ज्यों ज्यों $n\to\infty$

$$=0(1) \tag{4.9}$$

इसके बाद हम J_2 पर विचार करेंगे जहाँ

$$|J_2|=O\left[\int_{1/n}^{\delta}|F(\phi)|\,n^{\alpha-1/2}\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-5/2}d\phi\right]$$

$$=O(n^{\alpha-1/2}\left[0\left(\frac{\psi(1/\phi)}{P_{(1/\phi)}}\phi^{2\alpha+2}\right)\ \phi^{-\alpha-5/2}\right]_{1/n}^{\delta}$$

$$+O(n^{\alpha-1/2}\int_{1/n}^{\delta}0\left(\frac{\psi(1/\phi)}{P_{(1/\phi)}}\phi^{2\alpha+2}\right)\phi^{-\alpha-7/2}\,d\phi$$

$$=0(n^{\alpha-1/2})+0\left(\frac{\psi(n)}{P_{(n)}}+0(n^{\alpha-1/2})\int_{1/n}^{\delta}\frac{\psi(1)}{P_{(1/\phi)}}\phi^{\alpha-3/2}\,d\phi\right.$$

$$=0(1)+0(1)+0(n^{\alpha-1/2})\int_{1/n}^{\delta}\frac{\psi(1/(\phi)}{P_{(1/\phi)}}\phi^{\alpha-3/2}\,d\phi$$

अब

$$\int_{1/n}^{\delta}\frac{\psi(1/\phi)}{P_{(1/\phi)}}\phi^{\alpha-3/2}\,d\phi$$

$$=\int_{1\ \delta}^{n}x^{-1/2-\alpha}\frac{\psi(x)}{P_{(x)}}\,dx$$

$$=O\left(\frac{1}{\log n}\right)\int_{1/\delta}^{n} x^{-1/2-\alpha}\, dx$$

$$=O\left(\frac{n^{1/2-\alpha}}{\log n}\right)+O\left(\frac{1}{\log n}\right)$$

इसलिये $|J_2|=0(1)+0(n^{\alpha-1/2})\left[O\left(\frac{n^{1/2-\alpha}}{\log n}\right)+O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right]$

$$=0(1), \text{ क्योंकि } <\tfrac{1}{2}. \tag{4.10}$$

अब हम I_3 पर विचार करेंगे, जहाँ

$$|I_3|=\int_{\delta}^{\pi-1/n}|F(\phi)|\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}P_{(1/\phi)}\frac{d\phi}{\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{\alpha+3/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{\beta+1/2}}$$

$$+O(n^{\alpha-1/2})\int_{\delta}^{\pi-1/n}|F(\phi)|\frac{d\phi}{\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{\alpha+5/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{\beta+3/2}}$$

$$=O\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)\int_{\delta}^{\pi-1/n}\left|F(\phi)\right|\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{\beta+1/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{-2\beta-1}d\phi$$

$$+O(n^{\alpha-1/2})\int_{\delta}^{\pi-1/n}-\left|F(\phi)\right|\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{\beta-1/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{-2\beta-1}d\phi$$

किन्तु $F(\phi)=\left[f(\cos\phi)-A\right]\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{2\beta+1},$

इसलिये

$$|I_3|=O\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)\int_{\delta}^{\pi-1/n}\left|f(\cos\phi)-A\right|\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{\beta-1/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)d\phi$$

$$+O(n^{\alpha-1/2})\int_{\delta}^{\pi-1/n}\left|f(\cos\phi)-A\right|\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{\beta-1/2}d\phi$$

$$=O\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)+O(n^{\alpha-1/2}), \text{ (3.4) से}$$

$$=0(1), \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty.$$

अन्त में

$$|I_4|=\left|\int_{\pi-1/n}^{\pi}F(\phi)\,N_n(\phi)\,d\phi\right|$$

$$=O\left[\int_{\pi-1/n}^{\pi}|F(\phi)|\,n^{\alpha+\beta+1}\right], \text{ (3.3) से}$$

$$=O(n^{\alpha+\beta+1})\int_{\pi-1/n}^{\pi}|f(\cos\phi)-A|\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{2\beta+1}\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha+1}d\phi$$

$$=O(n^{\alpha+\beta+1})\int_{0}^{1/n}|f(-\cos\phi)-A|\,\phi^{2\beta+1}\,d\phi$$

$$=O(n^{\alpha-1/2})\int_{0}^{1/n}\phi^{\beta-1/2}\,|f(-\cos\varphi)-A|\,d\phi$$

$=0(1)$, (3.5) के प्रयोग से (4.12)

(4.4), (4.5), ..., (4.12), को सम्मिलित करने पर

$I(\phi)=0(1)$, ज्यों ज्यों $n\to\infty$.

इससे प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई।

निर्देश

1. गुप्ता, डी० पी०, **डी० एस०-सी० थीसिस, इलाहाबाद विश्वविद्यालय,** 1970
2. हार्डी, जी० एच० Divergent Series, आक्सफोर्ड 1949,
3. हसियांग, एफ० सी०, **बुल० कैल० मैथ० सोसा०,** 1969, **61**,1-5
4. आयंगर, के० एस० के०, **प्रोसी० इंडियन एके० साइंस**, 1943, **18A**, 81-87
5. आब्रेचकाफ, एन०, *Annuaire de l'Universite de Sofia, Faculte Physico-Mathematique,* 1935, **1**, 39-133.
6. पती, टी०, **इण्डि जर्न० मैथ०** 1961, 3, 85-90
7. राव, एच० *Jour. für die reine und angewandte Mathematik.*, 1929, **161**, 237-254.
8. सिद्दीकी, जे० ए०, **प्रोसी० इंडि० एके० साइंस**, 1948, **28**, 527-31
9. सिंह, टी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस इंडिया**, 1963, 29*A*, 65-73.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 2, April, 1976, Pages 153-157

दो चरों वाले H-फलन के जनक फलन

नाम प्रसाद सिंह
गणित विभाग, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त— मार्च 19, 1976]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र का उद्देश्य दो चरों वाले H-फलन के हेतु जनक फलन प्राप्त करना है। प्राप्त परिणामों की प्रकृति अत्यन्त सामान्य है, अतः इन परिणामों से कई रोचक विशिष्ट दशायें प्राप्त होती हैं।

Abstract

On some generating functions for H-function of two variables. *By* Namprasad Singh, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal.

The object of this paper is to be obtain some generating functions for H-function of two variables. The results are of very general character and many interesting known results may be derived as particular cases.

1. प्रस्तावना :

दो चरों वाले सार्वीकृत फाक्स [1, p- 408] के H-फलन को वर्मा[4] ने मेलिन-बार्नीज के समाकल के रूप में परिभाषित किया है, जिसको हम निम्न प्रकार से प्रदर्शित करते हैं :-

$$H_{(p_1,p_2),\, p_3;\, (q_1,q_2),\, q_3}^{(m_1,m_2);\, (n_1,n_2),\, n_3}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[(a_{p_1}, A_{p_1})];\, [(c_{p_2}, C_{p_2})];\, [(e_{p_3}, E_{p_3})]\\ [(b_{q_1}, B_{q_1})];\, [(d_{q_2}, D_{q_2})];\, [(f_{q_3}, F_{q_3})]\end{matrix}\right] \tag{1·1}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \psi(s, t)\phi(s+t)\, x^s y^t\, ds\, dt,$$

जहाँ

$$\psi(s, t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(b_j - B_j s)\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+A_j s)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j - D_j t)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+C_j t)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+B_j s)\prod_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j - A_j s)\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+D_j t)\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j - C_j t)} \tag{1·2}$$

$$\phi(s+t)=\frac{\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+E_js+E_jt)}{\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j-E_js-E_jt)\prod_{j=1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+F_js+F_jt)} \tag{1·3}$$

तथा $[(a_p, A_p)]$ द्वारा p प्राचलों के समुच्चय $(a_1, A_1), (a_2, A_2), \ldots, (a_p, A_p)$ का बोध होता है ।

(1·1) का समाकल निम्नांकित प्रतिबंधों के अन्तर्गत पूर्णतया अभिसारी है यदि $|\arg x|<\frac{1}{2}\mu_1\pi$ तथा $|\arg y|<\frac{1}{2}\mu_2\pi$ हो, जहाँ

$$\mu_1\equiv\left[\left(\sum_1^{n_1}A_j+\sum_1^{m_1}B_j+\sum_1^{n_3}E_j\right)-\left(\sum_{n_1+1}^{p_1}A_j+\sum_{m_1+1}^{q_1}B_j+\sum_{n_3+1}^{p_3}E_j+\sum_1^{q_3}F_j\right)\right] \tag{1.4}$$

तथा

$$\mu_2\equiv\left[\left(\sum_1^{n_2}C_j+\sum_1^{m_2}D_j+\sum_1^{n_3}E_j\right)-\left(\sum_{n_2+1}^{p_2}C_j+\sum_{m_2+1}^{q_2}D_j+\sum_{n_3+1}^{p_3}E_j+\sum_1^{q_3}F_j\right)\right]. \tag{1·5}$$

इस शोध पत्र में आगे सर्वत्र (1·1) द्वारा परिभाषित दो चरों वाले कंटूर समाकल को हम सांकेतिक रूप में $H[x, y]$ द्वारा व्यक्त करेंगे तथा प्राचलों के समुच्चयों

$$[(a_{p_1}, A_{p_1})], [(c_{p_2}, C_{p_2})], [(e_{p_3}, E_{p_3})], [(b_{q_1}, B_{q_1})], [(d_{q_2}, D_{q_2})], [(f_{q_3}, F_{q_3})]$$

को क्रमशः $[P_1], [P_2], [P_3], [Q_1], [Q_2], [Q_3]$ द्वारा अंकित करेंगे ।

इस शोध पत्र में हम निम्नांकित सूत्र का उपयोग करेंगे, ब्राउन [1, p. 822(6)]

$$\sum_{r=0}^{\infty}\begin{bmatrix}a+(b+1)r\\ r\end{bmatrix}u^r=\frac{(1+v)^{a+1}}{1-bv} \tag{1·6}$$

जहाँ v, u का एक फलन इस प्रकार से है कि $v(0)=0$, $v=u(1+v)^{b+1}$.

2. इस अनुभाग में निम्नांकित परिणामों की स्थापना की जायगी :

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}H^{(m_1, m_2);\,(n_1, n_2),\,n_3+1}_{(p_1, p_2),\,p_3+1;\,(q_1, q_2),\,q_3+1}\left[\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[P_1];[P_2];[1-\alpha+r\beta,\delta),[P_3]\\ [Q_1];[Q_2];[Q_3],(1-\alpha+r+r\beta,\delta)\end{matrix}\right]u^r$$
$$=\frac{(1+v)^{1-\alpha}}{1-\beta v}H\left[\frac{x}{(1+v)^{\delta}},\frac{y}{(1+v)^{\delta}}\right], \tag{2·1}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}H^{(m_1, m_2);\,(n_1, n_2),\,n_3+1}_{(p_1, p_2),\,p_3+1;\,(q_1, q_2),\,q_3+1}\left[\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[P_1];[P_2];(\alpha-r-r\beta,\delta),[P_3]\\ [Q_1];[Q_2];[Q_3],(\alpha-r\beta,\delta)\end{matrix}\right]u^r$$
$$=\frac{(1+v)^{1-\alpha}}{1-\beta v}H[(1+v)^{\delta}x,(1+v)^{\delta}y], \tag{2·2}$$

जहाँ v, u का एक फलन इस प्रकार परिभाषित है कि $v(0)=0$, $v=u(1+v)^{\beta+1}$, $|u|<1$, $\delta>0$, $|\arg x|<\frac{1}{2}\mu_1\pi$ तथा $|\arg y|<\frac{1}{2}\mu_2\pi$.

उपपत्ति :

(2·1) के सत्यापन के लिये बाम पक्ष में आये हुये दो चरों वाले H-फलन को (1·1) की भाँति मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल के पदों में व्यक्त करने पर और फिर समाकलन तथा संकलन का क्रम बदलने पर, जो कि दिये हुये प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है, हमें निम्नांकित मान प्राप्त होता है,

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\psi(s,t)\phi(s+t)\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{r!}\left[\frac{\Gamma(a-r\beta+\delta s+\delta t)}{\Gamma(a-r-r\beta+\delta s+\delta t)}u^r\right]x^s y^t\,ds\,dt. \tag{2·3}$$

अब निम्नांकित सूत्र, रेनविले [3, p. 32, 9]

$$\frac{(-1)^r\,\Gamma(1-\alpha)}{r!\,\Gamma(1-\alpha-r)}=\frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)} \tag{2·4}$$

का उपयोग करने पर तथा प्राप्त मान में (1·6) प्रयुक्त करके तथा फल को (1·1) की सहायता से विवेचित करने पर (2·1) का दाहिना पक्ष प्राप्त होता है, जिससे परिणाम सिद्ध होता है।

इसी प्रकार (2·2) को भी सिद्ध किया जा सकता है।

3. विशिष्ट दशायें :

(2·1) की निम्नांकित विशिष्ट दशायें हैं :

(i) यदि (2·1) में $n_3=p_3=q_3=0$ का उपयोग करने पर दो H-फलनों के गुणनफल के लिये जनक फलन प्राप्त होता है :

$$\sum_{r=1}^{r}\frac{(-1)^r}{r!}H^{(m_1,\,m_2);\,(n_1,\,n_2),\,1}_{(p_1,\,p_2),\,1;\,(q_1,\,q_2),\,1}\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[(a_{p_1},A_{p_1})];[(c_{p_2},C_{p_2})];[(e_{p_3},E_{p_3})]\\ [b_{q_1},B_{q_1})];[(d_{q_2},D_{q_2})];[(f_{q_3},F_{q_3})]\end{matrix}\right]u^r \tag{3·1}$$

$$=\frac{(1+v)^{1-\alpha}}{1-\beta v}H^{m_1,\,n_1}_{p_1,\,q_1}\left[\frac{x}{(1+v)^\delta}\middle|\begin{matrix}[(a_{p_1},A_{p_1})]\\ [(b_{q_1},B_{q_1})]\end{matrix}\right]H^{m_2,\,n_2}_{p_2,\,q_2}\left[\frac{y}{(1+v)^\delta}\middle|\begin{matrix}[(c_{p_2},C_{p_2})]\\ [(p_{q_2},D_{q_2})]\end{matrix}\right]$$

जहाँ v, u का फलन है जो $v(0)=0$, $v=u(1+v)^{\beta+1}$ द्वारा परिभाषित है।

$$|u|<1,\ \delta>0,\ |\arg x|<\tfrac{1}{2}\phi_1\pi,\ |\arg y|<\tfrac{1}{2}\phi_2\pi$$

जहाँ
$$\phi_1=\left[\sum_{1}^{m_1}(B_j)+\sum_{1}^{n_1}(A_j)-\sum_{m_1+1}^{q_1}(B_j)-\sum_{n_1+1}^{p_1}(A_j)\right]$$

तथा
$$\phi_2=\left[\sum_{1}^{m_2}(D_j)+\sum_{1}^{n_2}(C_j)-\sum_{m_2+1}^{q_2}(D_j)-\sum_{n_2+1}^{p_2}(C_j)\right].$$

(ii) यदि (2·1) में $n_2=p_2=n_3=p_3=q_3=0,\ m_2=q_2=1,\ d_1=0,\ D_1=1$ का उपयोग करें तथा $Lt\ y\to 0$ रखें तथा m_1, n_1, p_1, q_1 को क्रमशः m, n, p, q द्वारा परिवर्तन करने पर निम्नांकित जनक फलन प्राप्त होता है :

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} H^{m,\ n+1}_{p+1,\ q+1}\left[x\left|\begin{matrix}(1-\alpha-r\beta,\ \delta),\ [(a_p,\ A_p)]\\ [(b_q,\ B_q)],(1-\alpha+r+r\beta,\ \delta)\end{matrix}\right.\right] u^r$$

$$=\frac{(1+v)^{1-\alpha}}{1-\beta v} H^{m,n}_{p,q}\left[\frac{x}{(1+v)^{\delta}}\left|\begin{matrix}[(a_p,\ A_p)]\\ [(b_q,\ B_q)]\end{matrix}\right.\right] \tag{3·2}$$

जहाँ v, u का फलन है जो कि $v(0)=0$, $v=u(1+v)^{\beta+1}$ द्वारा परिभाषित है तथा $|u|<1,\ \delta>0$, $|\arg x|<\frac{1}{2}\mu\pi$

जहाँ $$\mu=\left[\sum_{1}^{m}(B_j)+\sum_{1}^{n}(A_j)-\sum_{m+1}^{q}(B_j)-\sum_{n+1}^{p}(A_j)\right].$$

(iii) यदि (3·2) में

$$H^{m,n}_{p,q}\left[x\left|\begin{matrix}[(a_p,\ A_p)]\\ [(b_q,\ B_q)]\end{matrix}\right.\right]=H^{n,m}_{q,p}\left[\frac{1}{x}\left|\begin{matrix}[(1-b_q,\ B_q)]\\ [(1-a_p,\ A_p)]\end{matrix}\right.\right] \tag{3·3}$$

को दोनों पक्षों में प्रयुक्त करें तथा x, m, n, p, q को क्रमशः $\frac{1}{x}, n, m, q, p$ द्वारा परिवर्तन करने पर तथा प्राप्त मान में प्राचलों $(1-b_p), (1-a_q), B_p, A_q$ को क्रमशः a_p, b_q, A_p, B_q द्वारा परिवर्तित करके हमें निम्न जनक फलन प्राप्त होता है :

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} H^{m+1,\ n}_{p+1,\ q+1}\left[x\left|\begin{matrix}[(a_p,\ A_p)];\ (\alpha-r-r\beta,\ \delta)\\ (\alpha-r\beta,\ \delta),\ [(b_q,\ B_q)]\end{matrix}\right.\right] u^r$$

$$=\frac{(1+v)^{1-\alpha}}{1-\beta v} H^{m,\ n}_{p,\ q}\left[x(1+v)^{\delta}\left|\begin{matrix}[(a_p,\ A_p)]\\ [(b_q,\ B_q)]\end{matrix}\right.\right] \tag{3·4}$$

यह परिणाम (2.3) में दिये हुये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है ।

इसी प्रकार परिणाम (2·2) की विशिष्ट दशायें भी प्राप्त की जा सकती हैं ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० पी० आनन्दानी का अत्यन्त आभारी है, जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में अमूल्य मार्ग-दर्शन किया ।

निर्देश

1. ब्राउन, जे० वाई०, **ड्यूक मैथ० जर्न०**, 1968, **35**, 821-823.
2. फाक्स, सी०, **ट्रांजे० अमे० सोसा०**, 1961, 98, 395-429.
3. रेनविले, ई० डी०, Special Functions. मैकमिलन, न्यूयार्क, 1960.
4. वर्मा, आर० यू०, **अनेल० साइं० युनि० (एल० आई० कुजा आसी० सेक्स मैथ०)**, 1971, **17**, 103-110.
5. शर्मा, बी० एल० तथा अवियोडन, आर० एफ० ए०, **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1974, **46**, 69-72.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No 2, April, 1976, Pages 159-162

कुछ क्षारीय हाइड्राइडों की वियोजन ऊर्जा

कु० उमा रानी पन्त
राजकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, पिथौरागढ़, कुमायूं विश्वविद्यालय

[प्राप्त—फरवरी 12, 1976]

सारांश

पाँच क्षारीय हाइड्राइडों [LiH, NaH, KH, RbH तथा CsH] की वियोजन ऊर्जा नये प्रकार के अन्योन्य-क्रिया विभव द्वारा परिकलित की गई है। वियोजन ऊर्जा के मान लॉगैरिथ्मिक विभव की सहायता से ज्ञात किये गये हैं। परिकलित मानों की तुलना प्रायोगिक मानों से की गई है। परिकलित मानों के परिणाम सन्तोषप्रद रहे।

Abstract

Dissociation energy of some alkali hydride molecules. *By* (Miss) Uma Rani Pant, Government Post graduate College, Pithoragarh, Kumaon University.

Expressions for the dissociation energy of some alkali hydride molecules have been derived employing a new type of interaction potential. The values of dissociatian energy were evaluated using logarithmic potential suggested recently. The calculated values are compared with the experimental values. Results obtained are satisfactory.

वियोजन ऊर्जा का परिकलन पिछले कई वर्षों से रुचिपूर्ण विषय बना हुआ है। अब तक वियोजन ऊर्जा के परिकलन के कुछ ही सीमित प्रयास[1] हो पाये हैं जिनमें कि अन्योन्य क्रिया विभव को प्रयोग में लाया जाता है। ठाकुर[2,3,4] ने तीन प्रकार के लॉगैरिथ्मिक अन्योन्य-क्रिया विभव दिये हैं जो विभिन्न आयनिक लवणों के भिन्न-भिन्न गुणों[5] को ज्ञात करने हेतु प्रयुक्त हुए हैं। प्रस्तुत टिप्पणी में हमने इन तीनों विभवों को लेकर विभिन्न आणवीय स्थिरांकों की सहायता से वियोजन ऊर्जा की गणना की है।

वियोजन ऊर्जा (D_e), आयनन विभव (I) तथा इलेक्ट्रॉन बन्धुता (E) योजक ऊर्जा (D_i) से निम्नलिखित समीकरण के अनुसार सम्बन्धित हैं—

$$D_e = E - I + D_i \qquad \ldots (1)$$

$$D_i = -U(r_e) \qquad \ldots (2)$$

हमने निम्नांकित विभव प्रयुक्त किये हैं—

$$U_{(r)} = -\frac{e^2}{r} + P \log\left(1 + \frac{p}{r^4}\right) \qquad \ldots (3)$$

$$U_{(r)} = -\frac{e^2}{r} + Q \log\left(2 + \frac{q}{r^2}\right) \qquad \ldots (4)$$

$$U_{(r)} = -\frac{e^2}{r} + D \log\left(4 + \frac{d}{r}\right) \qquad \ldots (5)$$

जहाँ P, p, Q, q, D, d विभवीय स्थिरांक हैं। उपर्युक्त समीकरणों में प्रत्येक समीकरण के दो स्थिरांक निम्नलिखित अवस्थाओं में परिकलित किये गये हैं—

$$\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=re} = 0 \qquad \ldots (6)$$

$$\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)_{r=re} = k_e \qquad \ldots (7)$$

जहाँ k_e बल स्थिरांक है तथा r_e आयनों के बीच की दूरी तथा r निकटतम आयनों के बीच की दूरी है। (3), (4) तथा (5) विभवों में (6) तथा (7) अवस्थायें प्रयोग करके वियोजन ऊर्जा इस प्रकार ज्ञात की जा सकती है—

$$D_e = E - I + \frac{e^2}{r_e}\left[1 - \left(\frac{r_e^4 - \{r_e^4(k_e r_e^3 - 3e^2)/(k_e r_e^3 + e^2)\}}{-4\{r_e^4(k_e r_e^3 - 3e^2)/(k_e r_e^3 + e^2)\}}\right)\right.$$
$$\left.\times \log\left(1 + \frac{-\{r_e^4(k_e r_e^3 - 3e^2)/(k_e r_e^3 + e^2)\}}{r_e^4}\right)\right] \qquad \ldots (8)$$

$$D_e = E - I + \frac{e^2}{r_e}\left[1 - \left(\frac{2r_e^2 - \{2r_e^2(k_e r_e^3 - e^2)/(k_e r_e^3 + e^2)\}}{-2\{2r_e^2(k_e r_e^3 - e^2)/(k_e r_e^3 + e^2)\}}\right)\right.$$
$$\left.\times \log\left(2 + \frac{-\{2r_e^2(k_e r_e^3 - e^2)/(k_e r_e^3 + e^2)\}}{r_e^2}\right)\right] \qquad \ldots (9)$$

$$D_e = E - I + \frac{e^2}{r_e}\left[1 - \left(\frac{4r_e - \{(4r_e^4 k_e)/(k_e r_e^3 + e^2)\}}{-\{4r_e^4 k_e)/(k_e r_e^3 + e^2)\}}\right)\right.$$
$$\left.\times \log\left(1 + \frac{-\{(4r_e^4 k_e)/(k_e r_e^3 + e^2)\}}{r_e}\right)\right] \qquad \ldots (10)$$

वियोजन ऊर्जा समीकरण (8), (9) तथा (10) द्वारा परिकलन हेतु आवश्यक आँकड़े सारणी 1 में दिये गये हैं। आयनों के बीच की दूरी (r_e) तथा बल स्थिरांक (k_e) वार्ष्णेय तथा शुक्ला[6] से लिये

सारणी 1

परिकलन हेतु प्रयुक्त आवश्यक आँकड़े

	r_e 10^{-8} सेमी०	k_e 10^5 डाइन/सेमी०	E इलेक्ट्रॉन वोल्ट (ev)	I इलेक्ट्रॉन वोल्ट (ve)
LiH	1·595	1·0256	·76	5·363
NaH	1 887	0·7841	.76	5·120
KH	2·244	0·56142	·76	4·318
RbH	2·367	0·51485	·76	4·159
CsH	2·494	0·4674	·76	3·890

सारणी 2

क्षारीय हाइड्राइडों की वियोजन ऊर्जा (इलेक्ट्रॉन वोल्ट)

	D_e (समी० 8)	D_e (समी० 9)	D_e (समी० 10)	D_e प्रायोगिक
LiH	3·269	2·695	·328	2·515
NaH	2·373	2·773	·502	2·124
KH	3·146	2·856	·899	1·921
RbH	2·045	2·689	·936	1·756
CsH	2·097	2·640	2·130	1·956

गये हैं। आयनन विभव (I) के मान हॉगमेन[7] से लिये गये हैं तथा इलेक्ट्रॉन बन्धुता (E) के मान ग्लोकर[8] से लिये गये हैं। वियोजन ऊर्जा के प्रायोगिक मान सारणी 2 में लिपिबद्ध हैं। ये मान वार्ष्णेय तथा शुक्ला[6] से लिये गये हैं। परिकलित मान जोकि समीकरण (8), (9) तथा (10) से ज्ञात किये गये हैं, सारणी 2 में दिये गये हैं। इनकी तुलना प्रायोगिक मानों से करने पर ज्ञात होता है कि समीकरण (8) द्वारा प्राप्त परिणाम सर्वोत्तम हैं तथा (8), (9) तथा (10) तीनों समीकरणों द्वारा परिकलित परिणाम सन्तोषप्रद हैं।

निर्देश

1. टंडन, एस० पी०, **फिजि० केमि०**, 1966, **26**, 231.

2. ठाकुर, के० पी०, **इण्डि० जर्न० प्योर एप्ला० फिजि०**, 1973, **11**, 549.

3. ठाकुर, के० पी०, इण्डि० जर्न० केमि०, 1973, **12**, 376.

4. ठाकुर, के० पी० तथा पाण्डेय, जे० डी०, जर्न० केमि० फिजि०, 1974, **71**, 850.

5. ठाकुर, के० पी०, तथा पाण्डेय, जे० डी०, जर्न० न्यूक्लि० केमि०, 1974, 36, 2171.

6. वार्ष्णेय, वाई० पी० तथा शुक्ला, आर० सी०, रिव्यू माडर्न फिजि०, 1963, 35, 130.

7. हॉगमैन, सी० डी०, Handbook of Chemistry and Physics, 1963.

8. ग्लोकर, जी०, फिजि० रिव्यू०, 1934, 46, 111.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 2, April, 1976, Pages 163-167

कैम्पे-द-फेरी फलन तथा H-फलन सम्बन्धी कतिपय समाकल

वी० बी० एल० चौरसिया
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरी कालेज, जयपुर

[प्राप्त--नवम्बर 21, 1975]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में कैम्पे-द-फेरी फलन तथा H-फलन सम्बन्धी कतिपय सान्त समाकल दिये गये हैं। प्राचलों के विशिष्टीकरण से कई फल प्राप्त होते हैं जिनमें से कुछ ज्ञात हैं और कुछ के सर्वथा नवीन होने की सम्भावना है।

Abstract

On some integrals involving Kampé de Fériet function and the H-function. *By* V. B. L. Chaurasia, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur.

This paper presents some finite integrals involving Kampé de Fériet function and the H-function. As the Kampé de Fériet function and the H-function are of a very general nature, the integrals, on specializing the parameters, lead to a generalization of many results, some of which are known and others are believed to be new.

1. विषय प्रवेश

श्रीवास्तव तथा डाउस्ट[10] द्वारा प्रचलित सार्वीकृत कैम्पे-द-फेरी फलन को निम्नांकित प्रकार से अभिव्यक्त एवं परिभाषित किया जावेगा।

$$S^{A\,:\,B;\,B'}_{C\,:\,D;\,D'}\left[\begin{matrix}[(a):\theta,\phi]:[(b):\psi];[(b'):\psi']: \\ \\ [(c):\delta,\epsilon]:[(d):\eta];[(d'):\eta']:\end{matrix}\;x,\,y\right]=\sum_{\sigma,\rho=0}^{\infty}E_{\rho,\sigma}\,x^{\rho}\,y^{\sigma} \qquad (1\cdot1)$$

जहाँ $E_{\rho,\sigma}$ व्यंजक

$$\frac{\prod_{i=1}^{A}\Gamma[a_i+\rho\theta_i+\sigma\phi_i]\prod_{i=1}^{B}\Gamma[b_i+\rho\psi_i]\prod_{i=1}^{B'}\Gamma[b_i'+\psi_i'\sigma]}{\prod_{i=1}^{C}\Gamma(c_i+\rho\delta_i+\sigma\epsilon_i]\prod_{i=1}^{D}\Gamma[d_i+\rho\eta_i]\prod_{i=1}^{D'}\Gamma[d_i'+\eta_i'\sigma]\,\rho!\,\sigma!}$$

के लिये आया है जिसमें अभिसरण के लिये

$$T_1 \equiv 1+\sum_{i=1}^{C} \delta_i+\sum_{i=1}^{D} \eta_i-\sum_{i=1}^{A} \theta_i-\sum_{i=1}^{B} \psi_i>0,$$

$$T_2 \equiv 1+\sum_{i=1}^{C} \epsilon_i+\sum_{i=1}^{D'} \eta_i'-\sum_{i=1}^{A} \phi_i-\sum_{i=1}^{B'} \psi_i>0;$$

जिससे कि $y \to 0$ सार्वीकृत कैम्पे-द-फेरी फलन (1.1) राइट[12, 13] के द्वारा प्रचलित सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय श्रेणी में समानीत हो जाता है और जब समस्त धन वास्तविक अचरों $\theta_1, \ldots, \theta_A; \phi_1, \ldots, \phi_A; \psi_1, \ldots, \psi_B; \psi_1', \ldots, \psi_B'; \delta_1, \ldots, \delta_C; \epsilon_1, \ldots, \epsilon_C; \eta_1, \ldots, \eta_D; \eta_1', \ldots, \eta'_{D'}$ को इकाई मान लिया जाता है तो यह

$$\frac{\prod_{i=1}^{A} \Gamma[a_i] \prod_{i=1}^{B} \Gamma[b_i] \prod_{i=1}^{B'} \Gamma[b_i']}{\prod_{i=1}^{C} \Gamma[c_i] \prod_{i=1}^{D} \Gamma[d_i] \prod_{i=1}^{D'} \Gamma[d_i']} \; F\left[\begin{matrix}(a) : (b);\ (b'): \\ (c) : (d);\ (d');\end{matrix}\ x, y\right],$$

के तुल्य होगा जहाँ $F[x, y]$ से संशोधित कैम्पे-द-फेरी फलन [8, p. 150] व्यक्त होता है (बर्चनाल तथा चांडी[2] के संक्षिप्त संकेत के रूप में)।

(a) से A प्राचलों का अनुक्रम $a_1, a_2, \ldots, a_A$ तथा (1·1) में सार्वीकृत कैम्पे-द-फेरी फलन को $S^{A\,:\,B;\,B'}_{C\,:\,D;\,D'}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ के रूप में लिखा जाता है।

(1·1) में द्विगुण श्रेणी के अभिसरण के प्रतिबन्ध निर्देश[11] में दिये हुये हैं।

फाक्स[7] द्वारा प्रचलित H-फलन को निम्नांकित प्रकार से अंकित एवं परिभाषित किया जावेगा:

$$H^{m,\,n}_{p,\,q}\left[\ \middle|\begin{matrix}(a_p,\ e_p)\\(b_q,\ f_q)\end{matrix}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(b_i-f_i\,r) \prod_{i=1}^{n} \Gamma(1-a_i+e_i\,r)\, z^r}{\prod_{i=1+m}^{q} \Pi(1-b_i+f_i\,r(\prod_{i=1+n}^{p} \Gamma(a_i-e_i\,r)}\, dr, \qquad (1\cdot2)$$

जहाँ रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है, $0 \leqslant m \leqslant q$, $0 \leqslant n \leqslant p$; समस्त e तथा f धन हैं, L ऐसा बार्नीज प्रकार का उपयुक्त कंटूर है कि $\Gamma(b_i-f_i r)$, $i=1, \ldots, m$ के पोल कंटूर के दाईं ओर तथा $\Gamma(1-a_i+e_i r)$, $i=1. \ldots, n$ के पोल बाईं ओर अवस्थित हों।

ब्राक्समा[1] ने H-फलन के उपगामी प्रसार तथा वैश्लेषिक सातत्य की विवेचना की है।

संक्षेपण की दृष्टि से

$$T \equiv \sum_{1}^{n} e_i - \sum_{n+1}^{p} e_i + \sum_{1}^{m} f_i - \sum_{m+1}^{q} f_i > 0$$

(a_p, e_p) अथवा $(a_i, e_i)_{1, p}$ से अनुक्रम $(a_1, e_1), \ldots, (a_p, e_p)$ का बोध होगा।

निम्नांकित रूपान्तरण सूत्रों[3] की आवश्यकता पड़ेगी:

यदि e_i, f_i में से एक अथवा कई को शून्य मान प्रदान किया जावे तब भी परिभाषित समाकल का कुछ अर्थ होगा और संगत रूपान्तरण सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं। उदाहरणार्थ:

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(a, 0), (a_i, e_i)_{2,p} \\ (b_i, f_i)_{1,q}\end{matrix}\right] = \Gamma(1-a)\, H_{p-1,q}^{m,n-1}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_i, e_i)_{2,p} \\ (b_i, f_i)_{1,q}\end{matrix}\right], \qquad (1\cdot3)$$

$$p \geqslant n \geqslant 1,\; R(1-a) > 0.$$

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_i, e_i)_{1,p-1}, (a, 0) \\ (b_i, f_i)_{1,q}\end{matrix}\right] = \frac{1}{\Gamma(a)}\, H_{p-1,q}^{m,n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_i, e_i)_{1,p-1} \\ (b_i, f_i)_{1,q}\end{matrix}\right], \qquad (1\cdot4)$$

$$p-1 \geqslant n \geqslant 0,\; R(a) > 0.$$

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_i, e_i)_{1,p} \\ (b, 0), (b_i, f_i)_{2,q}\end{matrix}\right] = \Gamma(b)\, H_{p,q-1}^{m-1,n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_i, e_i)_{1,p} \\ (b_i, f_i)_{2,q}\end{matrix}\right], \qquad (1\cdot5)$$

$$q \geqslant m \geqslant 1,\; R(b) > 0.$$

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_i, e_i)_{1,p} \\ (b_i, f_i)_{1,q-1}\end{matrix}, (b, 0)\right] = \frac{1}{\Gamma(1-b)}\, H_{p,q-1}^{m,n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_i, e_i)_{1,p} \\ (b_i, f_i)_{1,q-1}\end{matrix}\right], \qquad (1\cdot6)$$

$$q-1 \geqslant m \geqslant 0,\; R(1-b) > 0.$$

2. जिन प्रमुख समाकलों की व्युत्पत्ति की जानी हैं वे हैं:

$$\int_0^1 t^{w-1} (1-t)^s \, {}_2F_1(u, v; w; t)\, S_{C:D;D'}^{A:B;B'}\begin{bmatrix} x(1-t)^c \\ y(1-t)^d \end{bmatrix} H_{p,q}^{m,n}\left[z t^h (1-t)^k \,\middle|\, \begin{matrix}(a_p, e_p) \\ (b_q, f_q)\end{matrix}\right] dt$$

$$= \sum_{\rho, \sigma=0}^{\infty} E_{\rho,\sigma}\, x^\rho y^\sigma$$

$$\times H_{p+3,q+2}^{m,n+3}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(1-w, h), (1-s+c\rho-d\sigma, k), (1+u+v-w-s-c\rho-d\sigma, h+k), \\ (a_p, e_p) \\ (b_q, f_q), (1+u-w-s-c\rho-d\sigma, h+k), (1+v-w-s-c\rho-d\sigma, h+k)\end{matrix}\right], \qquad (2\cdot1)$$

जहाँ $R(w+hb_i/f_i)>0$, $R(s+kb_i/f_i)>-1$, $i=1, \ldots, m$, $R(w+s-u-v)>0$, $T>0$, $T_1>0$, $T_2>0$, $|\arg z|<\frac{1}{2}T\pi$, $h>0$, $k>0$.

$$\int_0^1 t^{w-1}(1-t)^s\, {}_2F_1(u, v; w; t)\, S^{A:B;B'}_{C:D;D'}\begin{bmatrix} x(1-t)^c \\ y(1-t)^d \end{bmatrix} \times H^{m,n}_{p,q}\left[zt^{-h}(1-t)^k \middle| \begin{matrix}(a_p, e_p)\\ (b_q, f_q)\end{matrix}\right] dt$$

$$= \sum_{\rho,\sigma=0}^{\infty} E_{\rho,\sigma}\, x^{\rho} y^{\sigma} \times H^{m+1,n+2}_{p+2,q+3}\left[z \middle| \begin{matrix}(1-s-c\rho-d\sigma, k), (1+u+v-w-s-c\rho-d\sigma, k-h), (a_p, e_p)\\ (w, h), (b_q, f_q), (1+u-w-c\rho-d\sigma, k-h),\\ (1+v-w-s-c\rho-d\sigma, k-h)\end{matrix}\right], \tag{2·2}$$

जहाँ $R(w-h(a_i-1)/e_i)>0$, $R(s+kb_{i'}/f_{i'})\geq 1$, $i=1, \ldots, n$; $i'=1, \ldots, m$, T, T_1, $T_2>0$, $h>0$, $k>0$, $R(w+s-u-v)>3$, $|\arg z|<\frac{1}{2}T\pi$.

उपपत्ति

(2·1) को सिद्ध करने के लिये $S^{A:B;B'}_{C:D;D'}\begin{bmatrix} x(1-t)^c \\ y(1-t)^d \end{bmatrix}$ को द्विगुण श्रेणी में व्यक्त करते हैं जैसा कि (1.1) में तथा $H^{m,n}_{p,q}\left[zt^h(1-t)^k \middle| \begin{matrix}(a_p, e_p)\\ (b_q, f_q)\end{matrix}\right]$ को (1·2) की सहायता से बार्नीज समाकल के रूप में व्यक्त करते हैं, समाकलन तथा संकलन के क्रम को बदलते हैं तथा इस प्रकार से प्राप्त समाकल का मान ज्ञात फल [6, p. 399 (4)] की सहायता से निकालते हैं। अन्त में (1·2) की सहायता से विवेचना करने पर हमें वांछित फल की प्राप्ति होती है।

इसी प्रकार सूत्र (2·2) को भी सिद्ध किया जा सकता है।

3. **विशिष्ट दशायें**

(i) (2·1) में $h\to 0$ लेने पर तथा (1·3) का उपयोग करने पर

$$\int_0^1 t^{w-1}(1-t)^s\, {}_2F_1(u, v; w; t)\, S^{A:B;B'}_{C:D;D'}\begin{bmatrix} x(1-t)^c \\ y(1-t)^d \end{bmatrix} \times H^{m,n}_{p,q}\left[z(1-t)^k \middle| \begin{matrix}(a_p, e_p)\\ (b_q, f_q)\end{matrix}\right] dt$$

$$= \sum_{\rho,\sigma=0} E_{\rho,\sigma}\, x^{\rho} y^{\sigma}\, \Gamma(w) \times H^{m,n+2}_{p+2,q+2}\left[z \middle| \begin{matrix}(1-s-c\rho-d\sigma, k), (1+u+v-w-s-c\rho-d\sigma, k), (a_p, e_p)\\ (b_q, f_q), (1+u-w-s-c\rho-d\sigma, k), (1+v-w-s-c\rho-d\sigma, k)\end{matrix}\right]. \tag{3·1}$$

जहाँ $R(w)>0$, $R(s+kb_i/f_i)>-1$, $i=1, \ldots, m$, $T, T_1, T_2>0$, $k>0$, $|\arg z|<\frac{1}{2} T\pi$, $R(w+s-u-v)>0$.

(ii) (2·1) में $k \to 0$ रखने पर तथा (1·3) का उपयोग करने पर

$$\int_0^1 t^{w-1} (1-t)^s \, {}_2F_1(u, v; w; t) \; S_{C:D;D'}^{A:B;B'} \begin{bmatrix} x(1-t)^c \\ y(1-t)^d \end{bmatrix} H_{p,q}^{m,n} \left[zt^h \middle| \begin{matrix} (a_p, e_p) \\ (b_q, f_q) \end{matrix} \right] dt$$

$$= \sum_{\rho, \sigma=0}^{\infty} E_{\rho, \sigma} \, x^\rho, y^\sigma \, \Gamma(s+c\rho+d\sigma)$$

$$\times H_{p+1, q+2}^{m, n+2} \left[z \middle| \begin{matrix} (1-w, h), (1+u+vw-s-c-\rho-d\sigma, h(a_p, e_p) \\ (b_q, f_q), (1+u-w-s-c\rho-d\sigma, h), (1+v-w-s-c\rho-d\tau, h) \end{matrix} \right], \tag{3·2}$$

जहाँ $R(s)>-1$, $R(w+hb_i/f_i)>0, i=1, \ldots, m$, $R(w+s-u-v)>0$, T, T_1, $T_2, h>0$, $|\arg z|<\frac{1}{2} T\pi$.

(iii) (3·1) में जब समस्त θ, ϕ, ψ, ψ', δ', ϵ', η, η' इकाई मान लिये जाते हैं तो हमें समर द्वारा प्राप्त फल मिलता है।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Compositio Math., 1963, **15**, 239-341.
2. बर्कनाल, जे० एल० तथा चाडी, टी० डब्लू, **क्वार्ट० जर्न० मैथ० (आक्सफोर्ड)**, 1941, **1**, 112-128.
3. चौरसिया, वी० बी० एल०, **ज्ञानाभा भाग A (प्रेस में)**
4. वही, **विज्ञान परि० अनु० पत्रिका**, 1975, **18**, 297-301
5. वही, **J. Acta Ciencia**, 1975, Vol. I (4).
6. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Tables of Integral Transforms 1954, **भाग II, मैकग्रा हिल, न्यूयार्क**
7. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429.
8. कैम्पे-द-फेरी तथा ऐपेल, पी०, Functions hypergéométriques et hypersphériques 1926, **गाथियर विलार्स, पेरिस**
9. समर, एम० एस०, Univ. Nac. Tucuman Rev. Ser. A 1974, 24.
10. श्रीवास्तवा, एच० एम० तथा डाउस्ट, एम० सी०, **Publ. Inst. Math.**, 1969, 9(23), 119-202.
11. वही, Math. Nachr. 1972, **52**, 151-159.
12. राइट, ई० एम०, **जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1935, **10**, 286-293.
13. वही, **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1943, **2**(46), 389-408.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 2, April, 1976, Pages, 169-177

फूरिये-जैकोबी श्रेणी की संकलनीयता |N, p_n|

आर० एस० चौधरी
गणित विभाग, राजकीय महाविद्यालय, बड़वानी (म० प्र०)

[प्राप्त—जनवरी 12, 1976]

सारांश

इस शोध पत्र में अन्तराल $[-1, 1]$ के बिन्दु $x=+1$ पर फ़ूरिये-जैकोबी श्रेणी की परम संकलनीयता $|N, p_n|$ की विवेचना की गई है।

Abstract

Absolute Nörlund summability of Jacobi series. *By* R. S. Choudhary, Department of Mathematics, Government College, Barwani (M. P.).

In this paper the absolute summability $|N, p_n|$ at end point $x=1$ has been discussed.

1. माना कि Σa_n एक अनन्त श्रेणी है जिसके आंशिक योगों का अनुक्रम $\{S_n\}$ है। श्रेणी को नारलुंड संकलनीयता (Nörlund summability) से योज्य कहा जाता है, यदि

$$t_n=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, S_k \to S,\ n\to\infty$$

जहाँ कि

$$P_n=\sum_{v=0}^{n} p_v$$

यदि श्रेणी

$$\Sigma\,|t_n-t_{n-1}|$$

अभिसारी हो तो श्रेणी Σa_n को परम संकलनीय (N, p_n) या संकलनीय $|N, p_n|$ कहा जाता है।

2. माना कि $f(x)$ लेबेस्क मापनीय फलन है जो परास $-1|\leq x\leq 1$ के लिये परिभाषित है। $f(x)$ के संगत जैकोबी श्रेणी

AP 10

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x), \tag{2.1}$$

द्वारा दी जाती है जहाँ

$$a_n = \frac{(2n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}} \frac{\Gamma_{(n+1)}}{\Gamma_{(n+\alpha+1)}} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}$$

$$\int_{-1}^{1} (1-t)^{\alpha} (1+t)^{\beta} f(t) P_n^{(\alpha, \beta)}(t)\, dt$$

विशिष्ट स्थिति में जब $\alpha = \beta = \lambda - ^{1/2}$ हो, श्रेणी (2.1) अल्ट्रास्फेरिक श्रेणी (Ultraspherical series)

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n^{\lambda}(x) \tag{2.2}$$

में बदल जाती है और $\lambda = \frac{1}{2}$ रखने पर श्रेणी (2.2) लेगेन्ड्र श्रेणी

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) \tag{2.3}$$

में परिवर्तित हो जाती है।

$x = \cos\theta$ रखने पर एवं $\lambda \to 0$ की स्थिति में (2.2) श्रेणी अन्तराल $(0, \pi)$ में फलन $f(\cos\theta)$ त्रिकोणमितीय श्रेणी में बदल जाती है।

विगत दो दशकों में फूरिये त्रिकोणमितीय श्रेणी की संकलनीयता (N, p_n) तथा परम संकलनीयता (N, p_n) से सम्बन्धित बहुत से महत्वपूर्ण प्रमेय सिद्ध किये गये हैं। अभी अभी हिस्यांग [2] ने फूरिये-त्रिकोणमितीय श्रेणी की संकलनीयता $|N, p_n|$ से सम्बन्धित निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है।

प्रमेय :

यदि $\{p_n\}$ धनात्मक अचरों का एक अनुक्रम है और $\{p_n, p_{n-1}\}$ एक दिष्ट और परिसीमित अनुक्रम है तथा

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{P_n (\log n)^{\Delta}} < \infty, \ \Delta > 0 \tag{2.4}$$

और $t \to 0$ के लिये

$$(\log 1/t)^{\Delta} |\phi(t)| = O(1) \tag{2.5}$$

तो फलन $f(t)$ से सम्बन्धित फूरिये त्रिकोणमितीय श्रेणी बिन्दु $t = x$ पर $|N, p_n|$ संकलनीय है।

3. इस शोध पत्र का उद्देश्य अन्तराल $[-1, 1]$ के बिन्दु $x = 1$ पर श्रेणी (2.1) के लिये संकलनीयता-$|N, p_n|$ से सम्बन्धित विषय पर शोध है जो कि उपर्युक्त प्रमेय के अनुरूप है।

$F(\phi)$ के द्वारा हम फलन

$$[f(\cos\phi)-A)]\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{2\beta+1}, \qquad (3.1)$$

को दर्शायेंगे और निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय :

यदि $\{p_n\}$ धनात्मक अचरों का एक अनुक्रम है और $\{p_n-p_{n-1}\}$ एक दिष्ट और परिसीमित अनुक्रम है तथा

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\alpha+3/2}}{P_n(\log) n)^{\triangle}}<\infty,\ \triangle>0 \qquad (3.2)$$

और

$$\int_0^t |F(\phi)|\,d\phi=O\left\{\frac{t^{\alpha+3/2}}{(\log 1/t)^{\triangle}}\right\}, \text{ ज्यों ज्यों } t\to 0, \qquad (3.2)$$

तो बिन्दु पर $x=1$ पर श्रेणी (2.1) संकलनीय $|N, p_n|$ है बशर्ते $\alpha\geqslant -1/2$, $\beta>-1/2$ और

$$\int_{-1}^{b}(1+x)^{\beta/2-3/4}\,|f(x)|\,dx<\infty, \qquad (3.4)$$

जहाँ b एक नियत अचर है।

$$P_n^{(\alpha,\beta)}x=(-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$$

को दृष्टि में रखते हुये ठीक इसी प्रकार का प्रमेय अन्तराल $[-1, 1]$ के बिन्दु $x=-1$ के लिये दिया जा सकता है।

4. प्रमेय को सिद्ध करने के लिये हमें निम्नांकित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका 1 : (झेगो [4] पृष्ठ 167)

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta=\begin{cases}\theta^{-\alpha-1/2}\,O(n^{-1/2}), & \phi_n\leqslant\theta\leqslant\pi/2,\\ O(n^{\alpha}), & 0\leqslant\theta\leqslant\phi_n\end{cases} \qquad (4,1)$$

प्रमेयिका 2: (झेगो [4] पृष्ठ 167)

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=\begin{cases}n^{-1/2}\,k(\theta)\,\{\cos(N\theta+\gamma)+O(1)\,(n\sin\theta^{-1}\},\\ \qquad c/n\leqslant\theta\leqslant\pi-9_n\end{cases} \qquad (4.2)$$

जहाँ

$$k(\theta)=\pi^{-1/2}(\sin\theta/2)^{-\alpha-1/2}(\cos\theta/2)^{-\beta-1/2};$$

$$N=n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}, \gamma=-(\alpha+1/2)\pi/2.$$

प्रमेयिका 3 :

यदि $$K_n(\phi)=2^{\alpha+\beta+1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \; P_n^{(\alpha+1, \beta)}(\cos\phi),$$

जहाँ

$$\lambda_k=\frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(k+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(k+\beta+1)} \cong \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma\alpha+1} k^{\alpha+1},$$

तो $0\leqslant\phi\leqslant 1/n$ के लिये

$$|k_n(\phi)=O(n^{2\alpha+3}). \tag{4.3}$$

उपपत्ति :

(4.1) का उपयोग करने पर $0\phi\leqslant\leqslant 1/n$ के लिये स्पष्ट है कि

$$|K_n(\phi)|=O\left[\sum_{k=0}^{n} (k^{\alpha+1})\,(k^{\alpha+1})\right]=O(n^{2\alpha+3}).$$

प्रमेयिका 4 :

$$1/n\leqslant\phi|\leqslant\pi-1/n,$$

के लिये

$$|k_n(\phi)|=O\left[n^{\alpha+1/2}\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-5/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{-\beta-1/2}\right]$$

$$+O\left[n^{\alpha+1/2}\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-5/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{-\beta-3/2}\right|$$

उपपत्ति :

(4.2) में दिये गये $P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos\theta)$ के अनन्तस्पर्शीय मान का उपयोग करने पर

$$K_n(\phi)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^{\alpha+1/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-3/2} \left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{-\beta-1/2}$$

$$\left[\cos\{k(\phi)+\rho\phi-\gamma\}+O(1)/(k\sin\phi)\right],$$

जहाँ

$$\rho=\frac{\alpha+\beta+2}{2}, \gamma=(\alpha+3/2)\pi/2$$

$$=\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-3/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{-\beta-1/2}\left[\cos(\gamma-\rho\phi)\sum_{k=0}^{n} k^{\alpha+1/2}\cos k\phi\right.$$

$$+\sin(\gamma-\rho\phi)\sum_{k=0}^{n} k^{\alpha+1/2}\sin k\phi\Big]+O(1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\alpha-1/2}\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-5/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{-\beta-3/2}$$

आबेल रूपान्तरण की मदद से हम पाते हैं कि

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\alpha+1/2}\cos k\phi=O(n^{\alpha+1/2})\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-1},\ n\phi\geqslant 1,$$

और

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\alpha+1/2}\sin k\phi=O(n^{\alpha+1/2})\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-1},\ n\phi\geqslant 1.$$

इसलिये

$$|K_n(\phi)|=O\left[n^{\alpha+1/2}\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-5/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{-\beta-1/2}\right]$$

$$+O\left[n^{\alpha+1/2}\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-5/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{-\beta-3/2}\right].$$

प्रमेयिका 5 :

$\pi-1/n\leqslant\phi\leqslant\pi$, के लिये

$$|K_n(\phi)|=O(n^{\alpha+\beta+2}). \tag{4.5}$$

उपपत्ति

माना कि $\phi=\pi-t$ जहाँ $0<t\leqslant 1/n$ तब

$$K_n(\phi)=K_n(\pi-t)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k P_k^{(\beta,(\alpha+1))}(\cos t)(-1)^k,$$

अतः (4.1) द्वारा

$$|K_n(\phi)|=O\left[\sum_{k=0}^{n} k^{\alpha+\beta+1}\right]=O(n^{\alpha+\beta+2}).$$

प्रमेयिका 6 :

माना कि $S_n^{(1)}=\sum_{v=0}^{v=n} S_v$. यदि $\{p_n\}$ धनात्मक अचरों का एक अनुक्रम है और $\{p_n-p_{n-1}\}$ एक दिष्ट (monotonic) और परिसीमित अनुक्रम है तथा

$$\Sigma_n\frac{\left|S_n^{(1)}\right|}{P_n}<\infty, \tag{4.6}$$

तो श्रेणी Σa_n संकलनीय $|N, p_n|$ होगी ।

प्रमेयिका 7: [1]

प्रतिबंध $\int_{-1}^{b} (1+x)^{\beta/2-3/4} |f(x)| \, dx<\infty$

के लगाने से, $\beta>-1/2$ के लिये

$$\int_{a=\cos^{-1} b}^{t} | f(\cos \theta)-A| (\cos \phi/2)^{\beta-1/2} \, d\theta<\infty \tag{4.7}$$

और

$$\int_{0}^{1/n} t^{\beta-1/2} \, | f(-\cos t)-A|dt=0(1). \tag{4.8}$$

प्रमेयिका 8 :

यदि $S_n^{(1)}(\phi)$ श्रेणी (2.1) का प्रथम क्रम का nवाँ चिजारो योग हो, और

$$F_1(\phi)=\int_0^t |F(\phi)| \, d\phi \tag{4.9}$$

$$=O\left[\frac{t^{\alpha+3/2}}{\log 1/t)_\Delta}\right], \text{ ज्यों ज्यों } t\to 0, \ \triangle>0.$$

तो

$$S_n^{(1)} \ (\phi)=O\left[\frac{n^{\alpha+3/2}}{(\log n)^\triangle}\right], \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty. \tag{4.10}$$

उपपत्ति :

आव्रेश्काफ [3] का अनुकरण करने पर श्रेणी (2.1) का बिन्दु $x=+1$ पर nवाँ आंशिक योग

$$S_n(1)=2^{\alpha+\beta} \int_0^\pi \left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha} \left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{2\beta} f(\cos \phi)\lambda_n \, P_n^{(\alpha+1, \, \beta)} (\cos \phi) \sin \phi \, d\phi$$

$$=2^{\alpha+\beta+1} \, \lambda_n \int_0^\pi F(\phi) \, P_n^{(\alpha+1, \, \beta)} (\cos \phi) \, d\phi.$$

इसलिये

$$S_n^{(1)} \ (\phi)=\sum_{k=0}^{n} \left\{\int_k (1)-A\right\}$$

$$=\int_0^\pi F(\phi) \, k_n(\phi) \, d\phi,$$

जहाँ

$$K_n(\phi)=2^{\alpha+\beta+1} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k^{(\alpha+1, \beta)} (\cos \phi)$$

प्रमेयिका को सिद्ध करने के लिये हमें यह बताना होगा कि

$$S_n^{(1)} (\phi)=\sum_{k=0}^{n} (S_k(1)-A)=O[n^{\alpha+3/2}/(\log n)^{\Delta}].$$

लिखें

$$S_n^{(1)} (\phi)=\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi-1/n}+\int_{\pi-1/n}^{\pi},$$

जहाँ δ एक उपयुक्त चुना हुआ छोटा अचर है

=मानाकि $I_1+I_2+I_3+I_4$

I_1 में, (4.3) का उपयोग करने पर

$$|I_1|=O(n^{2\alpha+3})\int_0^{1/n} |F(\phi)|d\phi$$

$=O(n^{2+3})\ 1/n^{\alpha+3/2}\ (1/\log n)_{\Delta}$, (4.9) के अनुसार

$$=O(n^{\alpha+3/2}/(\log n)^{\Delta}.$$

पुनः (4.4) का उपयोग करने पर

$$|I_2|=O(n^{\alpha+1/2})\int_{1/n}^{\delta}\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-5/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{-\beta-1/2} |F(\phi)|d\phi$$

$$+O(n^{\alpha+1/2})\int_{1/n}^{\delta}\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-5/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{-\beta-3/2} |F(\phi)\ d\phi,$$

$$=O(n^{\alpha+1/2})\int_{1/n}^{\delta} \phi^{-\alpha-5/2}/F(\phi)|\ d\phi$$

$$=O(n^{\alpha+1/2})\Big[F, (\phi)\ \phi^{-\alpha-5/2}\Big]_{1/n}^{\delta}$$

$$+O(n^{\alpha+1/2})\Big[\int_{1/n}^{\delta} F_1(\phi)\ \phi^{-\alpha-7/2}\ d\phi\Big]$$

$$=O(n^{\alpha+1/2})+O(n^{\alpha+3/2}/(\log n)^{\Delta})$$

$$+O(n^{\alpha+1/2})\int_{1/n}^{\delta}\left\{\phi^{\alpha+3/2}/(\log 1/\phi)^{\Delta}\right\}\phi^{-\alpha-7/2}\ d\phi,$$

क्योंकि δ पर्याप्त मात्रा मे छोटी चुनी राशि है ।

अब

$$\int_{1/n}^{\delta} 1/(\log 1/\phi)^{\Delta}\, 1/\phi^2\, d\phi$$

$$=\Big[1/\log 1/\phi)^{\Delta}\,(-1/\phi)\Big]_{1/n}^{\delta}+\int_{1/n}^{\delta} \triangle\, (\log 1/\phi)^{-(\Delta+1)}\, 1/\phi^2\, d\phi$$

$$=O(1)+[n/(\log n)^{\Delta}]+O(1)\int_{1/n}^{\delta} 1/\phi^2\, (\log 1/\phi)^{\Delta}\, d\phi$$

इस प्रकार हम पाते हैं कि

$$\int_{1/n}^{\delta} 1/(\log 1/\phi)^{\Delta}\, 1/\phi^2\, d\phi=O[n/(\log n)^{\Delta}]$$

इसलिये

$$|I_2|=O[n^{\alpha+3/2}/(\log n)^{\Delta}], \text{ क्योंकि } \triangle>0. \tag{4.13}$$

I_3 को लेने पर

$$|I_3|=O\Big[\int_{\delta}^{\pi-1/n} |F(\phi)|\, n^{\alpha+1/2}\Big(\sin\frac{\phi}{2}\Big)^{-\alpha-5/2}\Big(\cos\frac{\phi}{2}\Big)^{-\beta-1/2} d\phi\Big]$$

$$+O\Big[\int_{\delta}^{\pi-1/n} |F(\phi)|\, n^{\alpha+1/2}\Big(\sin\frac{\phi}{2}\Big)^{-\alpha-5/2}\Big(\cos\frac{\phi}{2}\Big)^{\beta-3/2} d\phi\Big]$$

$$=O[n^{\alpha+1/2}\int_{\delta}^{\pi-1/n} |f(\cos\phi)-A|\, \cos\frac{\phi}{2}\Big(\cos\frac{\phi}{2}\Big)^{\beta-1/2} d\phi$$

$$+O[n^{\alpha+1/2}\int_{\delta}^{\pi-1/n} |f(\cos\phi)-A|\Big(\cos\frac{\phi}{2}\Big)^{\beta-1/2} d\phi$$

$$=O(n^{\alpha+1/2}), \text{ (4.7) के अनुसार}$$

$$=O[n^{\alpha+3/2}/(\log n)^{\Delta}], \text{ क्योंकि } \triangle>0. \tag{4.14}$$

अन्त में

$$|I|_4=\Big|\int_{\pi-1/n}^{\pi} F(\phi)\, k_n(\phi)\, d\phi\Big|$$

$$=O(n^{\alpha+\beta+2}\int_{\pi-1/n}^{\pi} |F(\phi)|\, d\phi, \text{ (4.5) के अनुसार}$$

$$=O(n^{\alpha+\beta+2})\int_{\pi-1/n}^{\pi} |f(\cos\phi)-A|\Big(\sin\frac{\phi}{2}\Big)^{2\alpha+1}\Big(\cos\frac{\phi}{2}\Big)^{2\beta+1} d\phi$$

$$=O(n^{\alpha+\beta+2})\int_{0}^{1/n} |f(-\cos\phi)-A|\, \phi^{2\beta+1}\, d\phi$$

$$=O(n^{\alpha+1/2})\int_{0}^{1/n} |f(-\cos\phi-A)|\, \phi^{\beta-1/2}\, d\phi$$

$$=O(n^{\alpha+1/2}),\quad (4.8) \text{ के अनुसार}$$
$$=O[n^{\alpha+3/2}/(\log n)^{\Delta}], \text{ क्योंकि } \Delta>0. \tag{4.15}$$

(4.11), (4.12), (4.13), (4.14) और (4.15) को मिलाने पर

$$S_n^{(1)}(\phi)=O[n^{\alpha+3/2}/(\log n)^{\Delta}].$$

प्रमेय की उपपत्ति :

प्रमेयिका 8 के अनुसार

$$\sum_{v=n}^{\infty}\frac{\left|S_v^{(1)}(\phi)\right|}{P_v}=O(1)\sum_{v=n}^{\infty}v^{\alpha+3/}/P_v(\log v)^{\Delta}=O(1), \text{ (3.2) के अनुसार;}$$

अब प्रमेयिका 6 से प्रमेय उपपन्न हो जाता है

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोध पत्र की तैयारी में प्रोफेसर धर्म प्रकाश गुप्ता ने जो परामर्श दिया उसके लिये लेखक उनका आभारी है।

निर्देश

1. गुप्ता, डी० पी० तथा चौधरी, आ० एस०, **रेन्डी० ऐकेडमिया नाभ्क लिन्सी,** (प्रकाशनार्थ स्वीकृत)
2. ह्सियांग, एफ० सी०, **जर्न० आस्ट्रे० मैथ० सोसा०,** 1967, 7, 251-256.
3. आब्रेश्काफ, एन०, **युनिवर्सिटी डे सोफिया,** 1936, 1, 39-133.
4. झेगो, जी०, Orthogonals Polynomials. **कलोकियम पब्लि अमे० मैथ० सोसाइटी,** न्यूयार्क संस्करण 1959.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 2, April 1976, Pages 179-190

एक प्राचल के प्रति दो चरों वाले H-फलन का समाकलन

वाई० एन० प्रसाद तथा आर० के० गुप्ता
संप्रयुक्त गणित अनुभाग,
आई० टी०, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—सितम्बर 24, 1975]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में दो चरों वाले H-फलन में प्राचलों के प्रति कतिपय समाकलों की स्थापना की गई है। प्राप्त परिणाम समर, गोयल तथा माथुर के सार्वीकरण हैं। कतिपय विशिष्ट दशाओं की भी विवेचना की गई है।

Abstract

Integration of H-function of two variables with respect to a parameter. *By* Y. N. Prasad and R. K. Gupta, Applied Mathematics Section, I. T., B. H. U., Varanasi-5

In the present paper we establish certain integrations with respect to parameters in H-function of two variables, defined by Mittal and Gupta [3]. The results obtained are generalisations of Samar [6], Goyal and Mathur [7]. Some interesting particular cases have also been discussed.

1. **विषय प्रवेश**

मित्तल तथा गुप्ता ने दो चरों वले H-फलन को सांकेतिक रूप में निम्न प्रकार से परिभाषित किया है—

$$H(x, y) = H\left[\begin{array}{l|l|l} \binom{m_1, n_1}{p_1, q_1} & \begin{array}{l}\{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}\\ \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\}\end{array} & \\ \binom{m_2, n_2}{p_2, q_2} & \begin{array}{l}\{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\}\\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\}\end{array} & \begin{array}{l} x \\ \\ y\end{array} \\ \binom{m_3, n_3}{p_3, q_3} & \begin{array}{l}\{(e_{p_3}, E_{p_3})\}\\ \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}\end{array} & \end{array}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{L_1}\int_{L_2} \phi(s, t)\, \theta_1(s)\, \theta_2(t)\, ds\, dt \tag{1·1}$$

जहाँ

$$\phi(s, t)=\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(b_j-\beta_j s-B_j t) \prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1-a_j+\alpha_j s+A_j t)$$

$$\left[\prod_{j=m_1+1}^{q_1} \Gamma(1-b_j+\beta_j s+B_j t) \prod_{j=n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_j-\alpha_j s-A_j t)\right]^{-1}$$

$$\theta_1(s)=\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d_j-\delta_j s) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1-c_j+\gamma_j s) \left[\prod_{j=m_2+1}^{q_2} \Gamma(1-d_j+\delta_j s) \prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j-\gamma_j s)\right]^{-1}$$

$$\theta_2(t)=\prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(f_j-F_j t) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1-e_j+E_j t) \left[\prod_{j=m_3+1}^{q_3} \Gamma(1-f_j+F_j t) \prod_{j=n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j-E_j t)\right]^{-1}$$

तथा प्राचल $m_1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3; p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3$ इत्यादि निर्देश[3] की भाँति परिभाषित हैं।

सार्वीकृत मेहलर परिवर्त युग्म $f(r)$, $F(t)$ को निम्न प्रकार से परिभाषित करेंगे

$$F(t)=\int_1^\infty P^k_{it-1/2}(r)\, f(r)\, dr,$$

$$f(r)=\int_0^\infty \frac{\Gamma(\frac{1}{2}k\pm it)}{\Gamma(\pm it)}\, P^k_{it-1/2}(r)\, F(t)\, dt. \tag{1·2}$$

लांडीज़[2] ने निम्नांकित प्रमेय सिद्ध किया है। यदि $f(r)$, $F(t)$ तथा $g(r)$, $G(t)$ सार्वीकृत मेहलर परिवर्त का युग्म बनावें तो

$$\int_1^\infty g(r)\, f(r)\, dr=\int_0^\infty \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-k\pm it)}{\Gamma(\pm it)}\, G(t)\, F(t)\, dt. \tag{1·3}$$

निम्नांकित सार्वीकृत मेहलर परिवर्त के युग्मों की आवश्यकता होगी।

यदि $f(r)=(r-1)^{\lambda-1}\,(r^2-1)^{-1/2k}$,

तब एर्डेल्यी[1] द्वारा

$$F(t)=-\frac{2^{\lambda-u} \sin(\nu\pi)\, \Gamma(\lambda-\mu)\, \Gamma(-\lambda+\mu-\nu)\, \Gamma 1-\lambda+\mu)}{\pi\, \Gamma(1-\lambda)} \tag{1·4}$$

बशर्ते कि $Re(\lambda-\mu)>0$, $Re(\mu-\lambda-\nu)>0$, $Re(\mu-\lambda+\nu)>-1$.

ओवरहेटिंगर तथा हिगिंस[4] के द्वारा,

यदि $f(r)=2^{1-k}\, r x^{5/4-1/2k}\, e^{1/2x-xr^2}\,(r^2-1)^{-1/2k}$,

तो $$F(t)=W_{1/2k+1/4,\ 1/2it}(x), \tag{1·5}$$

बशर्ते कि $Re(k) \leqslant \frac{1}{2}$.

2. मुख्य समाकल

इस अनुभाग में प्राचल t के प्रति हम निम्नांकित दों समाकलों को स्थापित करेंगे :

$$\int_0^\infty \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-k \pm it)}{\Gamma(\pm it)} \frac{W_{k+1/4,\, 1/2it}(x)}{\Gamma(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}k \pm \frac{1}{2}it)} H\left[\begin{array}{l|l|l} \binom{2+m_1,\, 1+n_1}{2+p_1,\, 2+q_1} & \begin{array}{l}(1 \pm \frac{1}{2}k-\rho.\, \sigma,\, \mu),\, \{(a_{p_1},\, \alpha_{p_1},\, A_{p_1})\} \\ (\frac{3}{4} \pm \frac{1}{2}it-\rho,\, \sigma,\, \mu),\, \{(b_{q_1},\, \beta_{q_1},\, B_{q_1})\}\end{array} & x \\ \binom{m_2,\, n_2}{p_2,\, q_2} & \begin{array}{l}\{(c_{p_2},\, \gamma_{p_2})\} \\ \{(d_{q_2},\, \delta_{q_2})\}\end{array} & \\ \binom{m_3,\, n_3}{p_3,\, p_3} & \begin{array}{l}\{(e_{p_3},\, E_{p_3})\} \\ \{(f_{q_3},\, F_{q_3})\}\end{array} & y \end{array}\right] dt$$

$$= 2^{1-2k}\, x^{\rho-k-3/4}\, e^{-1/2x}\, H\left[\begin{array}{l|l|l} \binom{m_1,\, 1+n_1}{1+p_1,\, q_1} & \begin{array}{l}(1+\frac{1}{2}k-\rho,\, \sigma,\, \mu),\, \{(a_{p_1},\, \alpha_{p_1},\, A_{p_1})\} \\ \{(b_{q_1},\, \beta_{q_1},\, B_{q_1})\}\end{array} & x^{1-\sigma} \\ \binom{m_2,\, n_2}{p_2,\, q_2} & \begin{array}{l}\{(c_{p_2},\, \gamma_{p_2})\} \\ \{(d_{q_2},\, \delta_{q_2})\}\end{array} & \\ \binom{m_3,\, n_3}{p_3,\, q_3} & \begin{array}{l}\{(e_{p_3},\, F_{p_3})\} \\ \{(f_{q_3},\, F_{q_3})\}\end{array} & \frac{y}{x^\mu} \end{array}\right] \qquad (2{\cdot}1)$$

बशर्ते कि $R(k) \leqslant \frac{1}{2}$, तथा $\sigma, \mu > 0$, $R(\rho-\frac{1}{2}k+\sigma\delta_1'+\mu\delta_2') > 0$, $R(2\rho-\frac{3}{2}+\sigma\beta_1'+\mu\beta_2') < 0$, $|\arg x| < \frac{1}{2}u\pi$, $u > 0$, $|\arg y| < \frac{1}{2}v\pi$, $v > 0$,

$$u = \sum_1^{n_2} \gamma j - \sum_{n_2+1}^{p_2} \gamma j + \sum_1^{m_2} \delta_j - \sum_{m_2+1}^{q_2} \delta_j - \sum_1^{p_1} \alpha j - \sum_1^{q_1} \beta_j,$$

$$v = \sum_1^{n_3} E_j - \sum_{n_3+1}^{p_3} E_j + \sum_1^{m_3} F_j - \sum_{m_3+1}^{q_3} F_j - \sum_1^{p_1} A_j - \sum_1^{q_1} B_j,$$

$$\delta_1' = \min R(d_h/\delta_h)(h=1, \ldots, m_2),\ \delta_2' = \min R(f_h/F_h)(h=1, \ldots, m_3),$$

$$\beta_1' = \max R\left(\frac{c_i-1}{\gamma i}\right)(i=1, \ldots, n_2),$$

$$\beta_2' = \max R\left(\frac{c_i - 1}{E_i}\right)(i = 1, \ldots, n_3);$$

तथा

$$\int_0^\infty \frac{\sin (it - \frac{1}{2})\pi}{\Gamma(\pm it)}$$

$$H\left[\begin{matrix} \binom{m_1+2,\ n_1+1}{p_1+2,\ q_1+2} \\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2} \\ \binom{m_3,\ n_3}{p_3,\ q_3} \end{matrix}\left|\begin{matrix} \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}, (1+k-\lambda, \delta_1, \delta_2), (1-\lambda, \delta_1, \delta_2) \\ \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\}, (\frac{1}{2}-\lambda+k\pm it, \delta_1, \delta_2) \\ \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\} \\ \{(e_{p_3}, E_{p_3})\} \\ \{(f_{q_3}, F_{q_3})\} \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2^{\delta_1} x \\ \\ 2^{\delta_2} y \end{matrix}\right]$$

$$H\left[\begin{matrix} \binom{m_1'+2,\ n_1'+1}{p_1'+2,\ q_1'+2} \\ \binom{m_2',\ n_2'}{p_2',\ q_2'} \\ \binom{m_3',\ n_3'}{p_3',\ q_3'} \end{matrix}\left|\begin{matrix} \{(a'_{p_1'}, \alpha'_{p_1'}, A'_{p_1'})\}, (1-\alpha, \delta_3, \delta_4)(1-\alpha-k, \delta_3, \delta_4) \\ \{(b'_{q_1'}, \beta'_{q_1'}, B'_{q_1'})\}, (\frac{1}{2}-\alpha-k\pm it, \delta_3, \delta_4) \\ \{(c'_{p_2'}, \gamma'_{p_2'})\} \\ \{(d'_{q_2'}, \delta'_{q_2'})\} \\ \{(e'_{p_3'}, E'_{p_3'})\} \\ \{(f'_{q_3'}, F'_{q_3'})\} \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2^{\delta_3} x \\ \\ 2^{\delta_4} x \end{matrix}\right] dt$$

$$= \frac{\pi}{F_1 2^{\alpha+\lambda}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} y^{\rho_r} \psi(\rho_r) x^{\frac{1-\alpha-\lambda-\delta_2\rho_r}{\delta_1}}$$

$$H\left[\begin{matrix} \binom{n_2,\ m_2}{q_2+q_1+p_1',\ p_2+p_1+q_1'} \\ \binom{m_2',\ n_2'}{p_2',\ q_2'} \\ \binom{m_3',\ n_3'}{p_3',\ q_3'} \end{matrix}\left|\begin{matrix} \{(a'_{p_1'}, \alpha'_{p_1'}, A'_{p_1'})\}, \left\{\left(1-d_{q_2}-\frac{\alpha+\lambda-1+\delta_2\rho_r}{\delta_1}\delta_{q_2}, \frac{\delta_3}{\delta_1}\delta_{q_2}, \frac{\delta_4}{\delta_1}\delta_{q_2}\right)\right\}, \left\{\left(1-b_{q_1}+B_{q_1}\rho_r-\frac{\alpha+\lambda-1+\delta_2\rho_r}{\delta_1}\beta_{q_1}, \frac{\delta_3}{\delta_1}\beta_{q_1}, \frac{\delta_4}{\delta_1}\beta_{q_1}\right)\right\} \\ \{(b'_{q_1'}, \beta'_{q_1'}, B'_{q_1'})\}, \left\{\left(1-c_{p_2}-\frac{\alpha+\lambda-1+\delta_2\rho_r}{\delta_1}\gamma_{p_2}, \frac{\delta_3}{\delta_1}\gamma_{p_2}, \frac{\delta_4}{\delta_1}\gamma_{p_2}\right)\right\}, \left\{\left(1-a_{p_1}+A_{p_1}\rho_r-\frac{\alpha+\lambda-1+\delta_2\rho_r}{\delta_1}\alpha_{p_1}, \frac{\delta_3}{\delta_1}\alpha_{p_1}, \frac{\delta_4}{\delta_1}\alpha_{p_1}\right)\right\} \\ \{(c'_{p_2'}, \gamma'_{p_2'})\} \\ \{(d'_{q_2'}, \delta'_{q_2'})\} \\ \{(e'_{p_3'}, E'_{p_3'})\} \\ \{(f'_{q_3'}, F'_{q_3'})\} \end{matrix}\right|\begin{matrix} x^{1-\delta_3/\delta_1} \\ \frac{y}{x^{\delta_4/\delta_1}} \end{matrix}\right]$$

जहाँ $\rho_r = \frac{f_1 + r}{F_1}$ तथा $\psi(\rho_r) = \frac{\prod_{j=2}^{m_3} \Gamma(f_j - F_j \rho_r) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1 - e_j + E_j \rho_r)}{\prod_{j=m_3+1}^{q_3} \Gamma(1 - f_j + F_j \rho_r) \prod_{j=n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j - E_j \rho_r)}$

बशर्ते कि $R(\lambda - k + \delta_1\delta_1' + \delta_2\delta_2') > 0$, $R(\lambda - k - \frac{1}{2} + \delta_1\beta_1' + \delta_2\beta_2') < 0$, $|\arg x| < \frac{1}{2}u\pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2}v\pi$, $u > 0$, $v > 0$, जहाँ

$$\delta_1' = \min R(d_h/\delta h) h = 1, \ldots, m_2, \ \delta_2' = \min R(f_h/F_h) \ h = 1, \ldots, m_3;$$

$$\beta_1' = \max R\left(\frac{c_i - 1}{\gamma_i}\right) i = 1, \ldots, n_2 \ \beta_2' = \max R\left(\frac{e_i - 1}{E_i}\right) i = 1, \ldots, n_3;$$

$$u = \sum_1^{n_2} \gamma_j - \sum_{n_2+1}^{p_2} \gamma_j + \sum_1^{m_2} \delta_j - \sum_{m_2+1}^{q_2} \delta_j - \sum_1^{p_1} \alpha_j - \sum_1^{q_1} \beta_j,$$

$$V = \sum_1^{n_3} E_j - \sum_{n_3+1}^{p_3} E_j + \sum_1^{m_3} F_j - \sum_{m_3+1}^{q_3} F_j - \sum_1^{p_1} A_j - \sum_1^{q_1} B_j,$$

$R(\alpha + \delta_3\delta_1'' + \delta_4\delta_2'') > 0$, $R(\alpha + k - \frac{1}{2} + \delta_3\beta_1'' + \delta_4\beta_2'') < 0$ तथा $|\arg x| < \frac{1}{2}u'\pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2}v'\pi$, $u', v' > 0$ जहाँ δ_1'', δ_2'', β_1'', β_2'', u' तथा v' उपर्युक्त में एक और अधिक डैश रखने से प्राप्त होते हैं तथा δ_1, δ_2, δ_3 और $\delta_4 > 0$.

परिणामों की उपपत्ति :

(1·2) में

$$g(r) = (r^2 - 1)^{\rho - 1} H \left[\begin{array}{c|c|c} \binom{0, \ 0}{p_1, \ q_1} & \begin{array}{l} \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\} \\ \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\} \end{array} & x(r^2-1)^{\sigma} \\ \binom{m_2, \ n_2}{p_2, \ q_2} & \begin{array}{l} \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\} \end{array} & \\ \binom{m_3, \ n_3}{p_3, \ q_3} & \begin{array}{l} \{(e_{p_3}, E_{p_3})\} \\ \{(f_{q_3}, F_{q_3})\} \end{array} & y(r^2-1)^{\mu} \end{array} \right]$$

रखने पर तथा (1·4) का उपयोग करने पर

$$G(t) = \frac{2^{k-1}}{\Gamma(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}k \pm \frac{1}{2}it)} H \left[\begin{array}{c|l} \binom{2, \quad 1}{2 + p_1, \ 2 + q_1} & \begin{array}{l} \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}, \\ \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\}, \end{array} \\ \binom{m_2, \ n_2}{p_2, \ q_2} & \begin{array}{l} \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\} \end{array} \\ \binom{m_3, \ n_3}{p_3, \ q_3} & \begin{array}{l} \{(e_{p_3}, E_{p_3})\} \\ \{(f_{q_3}, F_q)\} \end{array} \end{array} \right.$$

$$\begin{matrix}(1+\tfrac{1}{2}k-\rho,\ \sigma,\ \mu),\ (1-\tfrac{1}{2}k-\rho,\ \sigma,\ \mu) \\ (\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}it-\rho,\ \sigma,\ \mu),\ (\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{2}it-\rho,\ \sigma,\ \mu)\end{matrix}\left|\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right] \quad (3{\cdot}1)$$

बशर्ते कि $\sigma, \mu>0$,

$R(\rho-\frac{1}{2}k+\sigma\delta_1'+\mu\delta_2')>0$, $R(2\rho-\frac{3}{2}+\sigma\beta_1'+\mu\beta_2')<0$, $|\arg x|<\frac{1}{2}u\pi$, $u>0$, $|\arg y|<\frac{1}{2}V\pi$, $V>0$,

$$u=\sum_1^{n_2}\gamma j-\sum_{n_2+1}^{p_2}\gamma j+\sum_1^{m_2}\delta_j-\sum_{m_2+1}^{q_2}\delta_j-\sum_1^{p_1}\alpha_j-\sum_1^{q_1}\beta_j$$

$$v=\sum_1^{n_3}E_j-\sum_{n_3+1}^{p_3}E_j+\sum_1^{m_3}F_j-\sum_{m_3+1}^{q_3}F_j-\sum_1^{p_1}A_j-\sum_1^{q_1}B_j,$$

$$\delta_1'=\min R(d_h/\delta_h)\ h=1,\ \ldots,\ m_2,\ \delta_2'=\min R\left(\frac{f_h}{F_h}\right)\ h=1,\ \ldots,\ m_3;$$

$$\beta_1'=\max R\left(\frac{c_i-1}{\gamma_i}\right)\ i=1,\ \ldots,\ n_2,\ \beta_2'=\max R\left(\frac{e_i-1}{E_i}\right)\ i=1,\ \ldots,\ n_3;$$

पुनः $$f(r)=2^{1-k}\,r\,x^{5/4-1/2k}\,e^{1/2x-xr^2}\,(r^2-1)^{-1/2k},$$
लेने पर हमें

$$F(t)=W_{1/2k+1/4,\ 1/2it}(x),$$

प्राप्त होता है बशर्ते कि $R(k)\leqslant\frac{1}{2}$.

अब (1·3) में $g(r)$, $G(t)$, $f(r)$ और $F(t)$ के मान रखने पर तथा बाम पक्ष के समाकल का मान द्विगुण कंटूर समाकल में दो चरों वाले H-फलन के द्वारा व्यक्त करने पर तथा आन्तरिक समाकल का मान लैप्लास परिवर्त की सहायता से ज्ञात करने पर हमें परिणाम (2·1) की प्राप्ति होती है।

(2·2) के लिये हम

$$f(r)=(r-1)^{\lambda-1}(r^2-1)^{-1/2k}H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}m_1, & n_1\\ p_1, & q_1\end{pmatrix} & \begin{matrix}\{(a_{p_1},\ \alpha_{p_1},\ A_{p_1})\}\\ \{(b_{q_1},\ \beta_{q_1},\ B_{q_1})\}\end{matrix} & x(r-1)^{\delta_1}\\ \begin{pmatrix}m_2, & n_2\\ p_2, & q_2\end{pmatrix} & \begin{matrix}\{(c_{p_2},\ \gamma_{p_2})\}\\ \{(d_{q_2},\ \delta_{q_2})\}\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}m_3, & n_3\\ p_3, & q_3\end{pmatrix} & \begin{matrix}\{(e_{p_3},\ E_{p_3})\}\\ \{(f_{q_3},\ F_{q_3})\}\end{matrix} & y(r-1)^{\delta_2}\end{matrix}\right]$$

लेंगे और तब (1·2) तथा एर्डेल्यी[1] का उपयोग करने पर

$$F(t)=-2^{\lambda-k}\frac{\sin\{(it-\frac{1}{2})\pi\}}{\pi}$$

$$H\left[\begin{array}{l|l|l} \binom{m_1+2,\ n_1+1}{p_1+2,\ q_1+2} & \{(a_{p_1},\alpha_{p_1},A_{p_1})\},\ (1+k-\lambda,\ \delta_1,\delta_2),\ (1-\lambda,\ \delta_1,\ \delta_2) & x\,2^{\delta_1} \\ & \{(b_{q_1},\beta_{q_1},\ B_{q_1})\},\ (\frac{1}{2}-\lambda+k\pm it,\ \delta_1,\ \delta_2) & y\,2^{\delta_2} \\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2} & \{(c_{p_2},\gamma_{p_2})\} & \\ & \{(d_{q_2},\delta_{q_2})\} & \\ \binom{m_3,\ n_3}{p_3,\ q_3} & \{(e_{p_3},E_{p_3})\} & \\ & \{(f_{q_3},F_{q_3})\} & \end{array}\right]$$

बशर्ते कि $R(\lambda-k+\delta_1\delta_1'+\delta_2\delta_2')>0$, $R(\lambda-k-\frac{1}{2}+\delta_1\beta_1'+\delta_2\beta_2')<0$, $|\arg x|<\frac{1}{2}u\pi,\ u>0$, $|\arg y|<\frac{1}{2}v\pi,\ v>0$, जहाँ $\delta_1', \delta_2', \beta_1', \beta_2', u$ तथा v उपर्युक्त अनुभाग के अनुसार परिभाषित होंगे ।

पुन:

$$g(r)=(r-1)^{\alpha-1}(r^2-1)^{1/2k}\,H\left[\begin{array}{l|l|l} \binom{m_1',\ n_1'}{p_1',\ q_1'} & \{(a'_{p_1'},\alpha'_{p_1'},A'_{p_1'})\} & x(r-1)^{\delta_3} \\ & \{(b'_{q_1'},\beta'_{q_1'},B'_{q_1'})\} & \\ \binom{m_2',n_2'}{p_2',\ q_2'} & \{(c'_{p_2'},\gamma'_{p_2'})\} & \\ & \{(d'_{q_2'},\delta'_{q_2'})\} & y(r-1)^{\delta_4} \\ \binom{m_3',\ n_3'}{p_3',\ q_3'} & \{(e'_{p_3'},E'_{p_3'})\} & \\ & \{(f'_{q_3'},F'_{q_3'})\} & \end{array}\right]$$

लेने पर तथा (1·2) और एर्डेल्यी[1] का सम्प्रयोग करने पर

$$G(t)=\frac{2^{\alpha+k}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k\pm it)}$$

$$H\left[\begin{array}{l|l|l} \binom{m_1'+2,\ n_1'+1}{p_1'+2,\ q_1'+2} & \{(a'_{p_1'},\alpha'_{p_1'},A'_{p_1'})\},\ (1-\alpha,\ \delta_3,\ \delta_4),\ (1-\alpha-k,\ \delta_3\ \delta_4 & x2^{\delta_3} \\ & \{(b'_{q_1'},\beta'_{q_1'},B'_{q_1'})\},(\frac{1}{2}-\alpha-k+it,\ \delta_3,\ \delta_4),(\frac{1}{2}-\alpha-k-it,\ \delta_3,\ \delta_4) & y2^{\delta_4} \\ \binom{m_2',n_2'}{p_2',\ q_2'} & \{(c'_{p_2'},\gamma'_{p_2'})\} & \\ & \{(d'_{q_2'},\delta'_{q_2'})\} & \\ \binom{m_3',\ n_3'}{p_3',\ q_3'} & \{(e'_{p_3'},E'_{p_3'})\} & \\ & \{(f'_{q_3'},F'_{q_3'})\} & \end{array}\right]$$

बशर्ते कि $R(\alpha+\delta_3\delta_1''+\delta_4\delta_2'')>0$, $R(\alpha+k-\frac{1}{2}+\delta_3\beta_1''+\delta_4\delta_2'')<0$, $|\arg x|<\frac{1}{2}u\pi$, $|\arg y|<\frac{1}{2}v\pi$, $u>0$, $v>0$, जहाँ δ_1'', δ_2'', β_1'', β_2'', u तथा v उपर्युक्त में एक डैश अधिक रखने से प्राप्त होते हैं।

अब (1·3) का प्रयोग करते हुये बाम पक्ष को प्रसाद तथा गुप्ता[5] के अनुसार श्रेणी रूप में परिणत करने पर अर्थात्

$$\int_0^\infty x^{\rho-1} H_1[bx^\sigma, ex^\mu] \; H_1^*[b'x^{\sigma'}, c'x^{\mu'}]dx=\frac{1}{F_1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}c^{\rho_r}\psi(\rho_r)b^{-\rho-\mu\rho_r/\sigma}$$

$$H\left[\begin{matrix}\binom{n_2,\, m_2}{p_1'+q_1+q_2,\, q_1'+p_1+p_2}\\ \binom{m_2,\, n_2}{p_2,\, q_2}\\ \binom{m_3,\, n_3}{p_3,\, q_3}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\{(a'_{p_1'}, \alpha'_{p_1'}, A'_{p_1'})\},\left\{\left(1-d_{q_2}-\frac{\rho+\mu\rho_r}{\sigma}\delta_{q_2}, \frac{\sigma'}{\sigma}\delta_{q_2}, \frac{\mu'}{\sigma}\delta_{q_2}\right)\right\},\\ \{(b'_{q_1'}, \beta'_{q_1'}, B'_{q_1'})\},\left\{\left(1-c_{p_2}-\frac{\rho+\mu\rho_r}{\sigma}\gamma_{p_2}, \frac{\sigma'}{\sigma}\gamma_{p_2}, \frac{\mu'}{\sigma}\gamma_{p_2}\right)\right\},\\ \{c'_{p_2'}, \gamma'_{p_2'})\}\\ \{(d'_{q_2'}, \delta'_{q_2'})\}\\ \{(e'_{p_3'}, E'_{p_3'})\}\\ \{(f'_{q_3'}, F'_{q_3'})\}\end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\left\{\left(1-b_{q_1}+B_{q_1}\rho_r-\frac{\rho+\mu\rho_r}{\sigma}\beta_{q_1}, \frac{\sigma'}{\sigma}\beta_{q_1}, \frac{\mu'}{\sigma}\beta_{q_1}\right)\right\}\\ \left\{\left(1-a_{p_1}+A_{p_1}\rho_r-\frac{\rho+\mu\rho_r}{\sigma}\alpha_{p_1}, \frac{\sigma'}{\sigma}\alpha_{p_1}, \frac{\mu'}{\sigma}\alpha_{p_1}\right)\right\}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\frac{b'}{b^{\sigma'/\sigma}}\\ \frac{c'}{b^{\mu'/\sigma}}\end{matrix}\right.\right]$$

जहाँ

$$\rho_r=\frac{f_1+r}{F_1}$$

तथा
$$\Psi(\rho_r)=\frac{\prod_{j=2}^{m_3}\Gamma(f_j-F_j\rho_r)\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+\ldots}{\prod_{j=m_3+1}^{q_3}\Gamma(1-f_i+F_i\rho_r)\prod_{n_3+1}^{q_3}\Gamma(e-E_i\rho_r)},$$

बशर्ते कि σ, σ', μ, $\mu'>0$, $|\arg b|<\frac{1}{2}\lambda\pi$, $\lambda>0$, $R(\rho+\sigma\alpha'+\mu\beta'+\sigma'\alpha''+\mu'\beta'')>0$, $R(\rho+\sigma\gamma'+\mu\delta'+\sigma'\gamma''+\mu'\delta'')<0$ जहाँ $\alpha'=\min R(d_h/\delta_h)$ $h=1, \ldots, m_2$, $\beta'=\min R(f_h/F_h)$ $h=1, \ldots, m_3$, $\gamma'=\max R\left(\frac{c_i-1}{\gamma_i}\right)$ $i=1, \ldots, n_2$, $\delta'=\max R\left(\frac{e_i-1}{E_i}\right)$ $i=1, \ldots, n_3$ तथा α'', β'', γ'', δ'' उपर्युक्त समीकरणों में प्राचलों के दोनों ओर एक एक डैश और रखने पर प्राप्त होते हैं तथा $|\arg b|<\frac{1}{2}u\pi$, $u>0$, $|\arg c|<\frac{1}{2}v\pi$, $v>0$,

$$u=-\sum_1^{p_1}\alpha_j-\sum_1^{q_1}\beta_j+\sum_1^{m_2}\delta_j-\sum_{m_2+1}^{q_2}\delta_j+\sum_1^{n_2}\gamma_j-\sum_{n_2+1}^{p_2}\gamma_j,$$

$$v=-\sum_{1}^{p_1}A_j-\sum_{1}^{q_1}B_j+\sum_{1}^{m_3}F_j-\sum_{m_3+1}^{q_3}F_j+\sum_{1}^{n_3}E_j-\sum_{n_3+1}^{p_3}E_j,$$

$|\arg b'|<\frac{1}{2}u'\pi,\ u'>0,\ |\arg c|<\frac{1}{2}v'\pi,\ v>0$ जहाँ u' और v' u तथा v प्राचलों में डैश रखकर प्राप्त किये जाते हैं।

विशिष्ट दशायें :

1. (*a*) $p_1=q_1=\sigma=\mu=0$ रखने पर तथा हल करने पर

$$\int_0^\infty \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-k\pm it)}{\Gamma(\pm it)}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{4}\pm\frac{1}{2}it-\rho)}{\Gamma(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}k\pm\frac{1}{2}it)}W_{k+1/4,\ \frac{1}{2}it}(x)=2^{1-2k}\,x^{\rho-k-3/4}\,e^{-1/2x}\,\Gamma(1-\tfrac{1}{2}k-\rho)$$

बशर्ते कि $R(k)\leqslant\frac{1}{2},\ R(\frac{3}{4}-\rho)>0.$

(*b*) पुनः $p_1=q_1=0=\mu$ रखने पर

$$\int_0^\infty \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-k\pm it)}{\Gamma(\pm it)}\,\frac{W_{k+1/4,\ 1/2it}(x)}{\Gamma(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}k\pm\frac{1}{2}it)}\,H^{m_2+2,\ n_2+1}_{p_2+2,\ q_2+2}\left[x\left|\begin{matrix}(1+\frac{1}{2}k-\rho,\sigma),\{(c_{p_2},\gamma_{p_2})\},(1-\frac{1}{2}k-\rho,\sigma)\\(\frac{3}{4}\pm\frac{1}{2}it-\rho,\sigma),\{(d_{q_2},\delta_{q_2})\}\end{matrix}\right.\right]dt$$

$$=2^{1-2k}\,x^{\rho-k-3/4}\,e^{-1/2x}\,H^{m_2,\ n_2+1}_{p_2+1,\ q_2}\left[x^{1-\sigma}\left|\begin{matrix}(1+\frac{1}{2}k-\rho,\sigma),\{(c_{p_2},\gamma_{p_2})\}\\\{(d_{q_2},\delta_{q_2})\}\end{matrix}\right.\right],$$

बशर्ते कि $R(k)<\frac{1}{2},\ \sigma>0,\ R(\rho-\frac{1}{2}k+\sigma\delta_1')>0,\ R(2\rho-\frac{3}{2}+\sigma\beta_1')>0,\ |\arg x|<\frac{1}{2}u\pi,\ u>0,$

$$u=\sum_{1}^{n_2}\gamma_j-\sum_{n_2+1}^{p_2}\gamma_j+\sum_{1}^{m_2}\delta_j-\sum_{m_2+1}^{q_2}\delta_j,$$

$$\delta_1'=\min R(d_h/\delta_h)\ h=1,\ldots,m_2,$$

$$\beta_1'=\max R\left(\frac{c_i-1}{\gamma_i}\right)i=1,\ldots,n_2,$$

यह परिणाम समर[6(2.1)] द्वारा प्राप्त परिणाम के तुल्य है।

2. (*a*) (2·2)में $m_1'=q_1'=n_1'=p_1'=0=\delta_3=\delta_4$ रखने पर

$$\int_0^\infty \sin(it-\tfrac{1}{2})\pi\ H\left[\begin{matrix}\binom{m_1+2,\ n_1+1}{p_1+2,\ q_1+2}\\\binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2}\\\binom{m_3,\ n_3}{p_3,\ q_3}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\{(a_{p_1},\alpha_{p_1},A_{p_1})\},(\frac{1}{2},\delta_1,\delta_2)(1-\lambda,\delta_1,\delta_2)\\\{(b_{q_1},\beta_{q_1},B_{q_1})\},(\pm it,\delta_1,\delta_2)\\\{(c_{p_2},\gamma_{p_2})\}\\\{(d_{q_2},\delta_{q_2})\}\\\{(e_{p_3},E_{p_3})\}\\\{(f_{q_3},F_{q_3})\}\end{matrix}\right|\begin{matrix}2^{\delta_1}x\\\\2^{\delta_2}y\end{matrix}\right]$$

$$dt=\frac{(1-\lambda)\sqrt{\pi}}{F_1 2^{\alpha+\lambda}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}y^{\rho_r}\psi(\rho_r)\,x^{1-\alpha-\lambda-\delta_2\rho_r/\delta_1}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(L_j)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(1-K_j)}{\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(1-L_j)\prod_{j=1}^{p_1}\Gamma(1-N_j)\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(K_j)\prod_{j=1}^{q_1}\Gamma(M_j)}$$

जहाँ

$$K_j=1-d_j-\frac{\alpha+\lambda-1+\delta_2\rho_r}{\delta_1}\delta_j,\ L_j=1-c_j-\frac{\alpha+\lambda-1+\delta_2\rho_r}{\delta_1}\gamma_j,$$

$$M_j=1-b_j+B_j\rho_r-\frac{\alpha+\lambda-1+\delta_2\rho_r}{\delta_1}\beta_j,\ N_j=1-a_j+A_j\rho_r-\frac{\alpha+\lambda-1+\delta_2\rho_r}{\delta_1}\alpha_j,$$

बशर्ते कि $R(\lambda-k+\delta_1\delta_1'+\delta_2\delta_2')>0,\ R(\lambda-k-\frac{1}{2}+\delta_1\beta_1'+\delta_2\beta_2')<0,$

$$\delta_1'=\min R(d_h/\delta_h)\ h=1,\ldots,m_2,\ \ \delta_2'=\min R(f_h/F_h)\ h=1,\ldots,m_3,$$

$$\beta_1'=\max \mathrm{R}\left(\frac{c_i-1}{\gamma_i}\right)i=1,\ldots,n_2,\ \ \beta_2'=\max R\left(\frac{e_i-1}{E_i}\right)i=1,\ldots,n_3,\ \delta_1,\delta_2>0$$

$|\arg x|<\frac{1}{2}u\pi,\ u>0,\ |\arg y|<\frac{1}{2}v\pi,\ v>0,$

$$u=\sum_1^{n_2}\gamma_j-\sum_{n_2+1}^{p_2}\gamma_j+\sum_1^{m_2}\delta_j-\sum_{m_2+1}^{q_2}\delta_j-\sum_1^{p_1}\alpha_j-\sum_1^{q_1}\beta_j,$$

जहाँ

$$v=\sum_1^{n_3}E_j-\sum_{n_3+1}^{p_3}E_j+\sum_1^{m_3}F_j-\sum_{m_3+1}^{q_3}F_j-\sum_1^{p_1}A_j-\sum_1^{q_1}B_j.$$

(*b*) अब (2·2) में $p'_1=q'_1=\delta_3=0$ रखने पर

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(it-\frac{1}{2})\pi}{\Gamma(\pm it)}H^{m_3'+2,\,n_3'+1}_{p_3'+2,\,q_3'+2}\left[y2^{\delta_4}\left|\begin{matrix}(1-\alpha,\delta_4),\{(e'_{p_3'},E'_{p_3'})\},(1-\alpha-k,\delta_4)\\(\frac{1}{2}-\alpha-k\pm it,\delta_4),\{(f'_{q_3'},F'_{q_3'})\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$H\left[\begin{matrix}\binom{m_1+2,\ n_1+1}{p_1+2,\ q_1+2}\\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2}\\ \binom{m_3,\ n_3}{p_3,\ q_3}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(1+k-\lambda,\delta_1,\delta_2),\{(a_{p_1},\alpha_{p_1},A_{p_1})\},(1-\lambda,\delta_1,\delta_2)\\(\frac{1}{2}-\lambda+k\pm it,\delta_1,\delta_2),\{(b_{q_1},\beta_{q_1},B_{q_1})\}\\\{(c_{p_2},\gamma_{p_2})\}\\\{(d_{q_2},\delta_{q_2})\}\\\{(e_{p_3},E_{p_3})\}\\\{(f_{q_3},F_{q_3})\}\end{matrix}\right|\begin{matrix}x\\ \\ y2^{\delta_4}\end{matrix}\right]dt$$

$$=\frac{\pi}{F_1\ 2^{\alpha+\lambda}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}y^{\rho_r}\psi(\rho_r)x^{\frac{1-\alpha-\lambda-\delta_2\rho_r}{\delta_1}}$$

$$H^{m_3'+n_2,\ n_3'+m_2}_{p_3'+q_2+q_1,\ q_3'+p_2+p_1}\left[y2^{\delta_4}\left|\begin{matrix}\{(e'_{p_3'},E'_{p_3'})\},\left\{\left(1-d_{q_2}-\frac{\alpha+\lambda-1+\delta_2\rho_r}{\delta_1}\delta_{q_2},\frac{\delta_4}{\delta_1}\delta_{q_2}\right)\right\},\left\{\left(1-b_{q_1}+B_{q_1}\rho_r-\frac{\alpha+\lambda-1+\delta_2\rho_r}{\delta_1}\beta_{q_1},\frac{\delta_4}{\delta_1}\beta_{q_1}\right)\right\}\\ \{(f'_{q_3'},F'_{q_3'})\},\left\{\left(1-c_{p_2}-\frac{\alpha+\lambda-1+\delta_2\rho_r}{\delta_1}\gamma_{p_2},\frac{\delta_4}{\delta_1}\gamma_{p_2}\right)\right\},\left\{\left(1-a_{p_1}+A_{p_1}\rho_r-\frac{\alpha+\lambda-1+\delta_2\rho_r}{\delta_1}\alpha_{p_1},\frac{\delta_4}{\delta_1}\alpha_{p_1}\right)\right\}\end{matrix}\right.\right],$$

बशर्ते कि $R(\lambda-k+\delta_1\delta_1'+\delta_2\delta_2')>0$, $R(\lambda-k-\frac{1}{2}+\delta_1\beta_1'+\delta_2\beta_2')<0$, $|\arg x|<\frac{1}{2}u\pi$, $u>0$, $|\arg y|<\frac{1}{2}v\pi$, $v>0$,

जहाँ

$$\delta_1'=\min R(d_h/\delta_h)\ h=1,\ \ldots,\ m_2,\quad \delta_2'=\min R(f_h/F_h)\ h=1,\ \ldots,\ m_3,$$

$$\beta_1'=\max\ R\left(\frac{c_i-1}{\gamma_i}\right)i=1,\ \ldots,\ n_2,\ \beta_2'=\max\ R\left(\frac{e_i-1}{E_i}\right)i=1,\ \ldots,\ n_3,$$

$$u=\sum_1^{n_2}\gamma_j-\sum_{n_2+1}^{p_2}\gamma_j+\sum_1^{m_2}\delta_j-\sum_{m_2+1}^{q_2}\delta_j-\sum_1^{p_1}\alpha_j-\sum_1^{q_1}\beta_j,$$

$$v=\sum_1^{n_3}E_j-\sum_{n_3+1}^{p_3}E_j+\sum_1^{m_3}F_j-\sum_{m_3+1}^{q_3}F_j-\sum_1^{p}A_j-\sum_1^{q_1}B_j,$$

$R(\alpha+\delta_4\delta_2'')>0$, $R(\alpha+k-\frac{1}{2}+\delta_4\beta_2'')<0$, $|\arg y|<\frac{1}{2}v'\pi$, $v>0$,

जहाँ $\quad\delta_2''=\min R(f_h/F_h)\ h=1,\ \ldots,\ m_3\ \beta_2''=\max R\left(\frac{e_i-1}{E_i}\right)\ i=1.\ ,\ldots,\ n_3,$

$$v'=\sum_1^{n_3'}E_j'-\sum_{n_3'+1}^{p_3'}E_j'+\sum_1^{m_3'}F_j'-\sum_{m_3'+1}^{q_3'}F_j',$$

तथा

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_4>0.$$

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Table of Integral Transforms भाग II, 1954. पृष्ठ 321 (4, 5).
2. लोन्डीज, जे० एस०, प्रोसी० कैम्ब्रि० फिला० सोसा०, 1964, 60, 57-59.
3. मित्तल पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, प्रोसी० इंडि० एके० साइंस, 1972, 75A, 117-23.

4. ओबरहेटिंगर, एफ० तथा हिगिंस, टी० पी०, Tables of Lebedev, Mehler and Generalised Mehler Transform. बोइंग साइंटिफिक रिसर्च लैबोरेटरीज, मैथमेटिकल नोट 246 वाशिंगटन, 1961.

5. प्रसाद, वाई० एन० तथा गुप्ता, आर० के०, (प्रकाशनार्थ प्रेषित)

6. समर, एम० एस०, **जर्न० इण्डि० मैथ० सोसा०**, 1973, **37**, 323.

7. गोयल, एस० पी० तथा माथुर, एस० एल०, **विज्ञान परि० अनु० पत्रिका**, 1975, **18**, 133-37.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 2, April, 1976, Pages 191-196

दो चरों वाले सार्वीकृत H-फलन के प्रसार सूत्र-I

एम० पी० चौबीसा
गणित विभाग, उदयपुर विश्वविद्यालय, उदयपुर

[प्राप्त—मई 27, 1975]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में द्विपदी प्रमेय की सहायता से दो चरों वाले सार्वीकृत H-फलन के प्रसार सूत्रों की स्थापना की गई है।

Abstract

Expansion formulae for generalised H-function of two variables-I. *By* M. P. Chobisa, Department of Mathematics. University of Udaipur, Udaipur.

In this paper, we have established expansion formulae for generalised H-function of two variables with the help of binomial theorem.

1. विषय प्रवेश

इस शोधपत्र में दो चरों वाले सार्वीकृत H-फलन के प्रसार सूत्र प्राप्त किये गये हैं जो S-फलन (शर्मा[10]), G-फलन (अग्रवाल[1]), ऐपेल फलन F_1, F_2, F_3, तथा F_4, दो चरों के व्हिटेकर फलन, कैम्पे-द-फेरी फलन $F(x, y)$ तथा दो चरों वाले अन्य विशिष्ट फलन का विशिष्टीकरण है। माइजर के G-फलन के प्रसार सूत्र हमारे फलों की विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त होते हैं।

गुप्ता[4] ने अपने हाल के शोधपत्र में दो चरों वाले सार्वीकृत H-फलन की परिभाषा निम्न प्रकार से की है:

$$H\left[\begin{matrix}\binom{0,\ n_1}{p_1,\ q_1} \\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2} \\ \binom{m_3,\ n_3}{p_3,\ q_3}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a_{p_1};\ \alpha_{p_1},\ A_{p_1});\ (b_{q_1};\ \beta_{q_1},\ B_{q_1}) \\ (c_{p_2},\ \gamma_{p_2});\ (d_{q_2},\ \delta_{q_2}) \\ (e_{p_3},\ E_{p_3});\ (f_{q_3},\ F_{q_3})\end{matrix}\right|\begin{matrix}x \\ \\ y\end{matrix}\right]$$

$$=(2\pi i)^{-2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s, t)\psi_1(s)\psi_2(t)x^s y^t \, ds \, dt \tag{1·1}$$

जहाँ
$$\phi(s, t)=\frac{\prod_{j=1}^{n1} \Gamma(1-a_j+\alpha_j s+A_j t)}{\prod_{j=1+n_1}^{p1} \Gamma(a_j-\alpha_j s-A_j t) \prod_{j=1}^{q1} \Gamma(1-b_j+\beta_j s+B_j t)},$$

$$\psi_1(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m2} \Gamma(d_j-\delta_j s) \prod_{j=1}^{n2} \Gamma(1-c_j+\gamma_j s)}{\prod_{j=1+n_2}^{p2} \Gamma(c_j-\gamma_j s) \prod_{j=1+m_2}^{q2} \Gamma(1-d_j-\delta_j s)},$$

$$\psi_2(t)=\frac{\prod_{j=1}^{m3} F(f_j-F_j t) \prod_{j=1}^{n3} \Gamma(1-e_j+E_j t)}{\prod_{j=1+n_3}^{p3} \Gamma(e_j-E_j t) \prod_{j=1+m_3}^{q3} \Gamma(1-f_j+F_j t)},$$

जहाँ x तथा y शून्य के तुल्य नहीं हैं और रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है। अपरंच, अनृण पूर्णांक $n_i, p_i, q_i, (i=1, 2, 3)$ तथा m_2, m_3 ऐसे हैं कि $0 \leqslant n_i \leqslant p_i, q_1 \geqslant 0, 0 \leqslant m_j \leqslant q_j$ $(i=1, 2, 3; j=2, 3)$ ग्रीक अक्षर $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ तथा अंग्रेजी के अक्षर $A, B, E, F,$ सभी धन हैं।

कंटूर L_1 S-तल पर है और आवश्यकतानुसार अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $i\infty$ तक फैलता है जिससे यह आश्वस्त हुआ जा सके कि $\Gamma(d_j-\delta_j s)(j=1, 2, \ldots, m_2)$ के पोल कंटूर के दाईं ओर तथा $\Gamma(1-a_j+\alpha_j s+A_j t)(j=1, 2, \ldots, n_1)$, $\Gamma(1-c_j+\gamma_j s)(j=1, 2, \ldots, n_2)$ के पोल उसके बाईं ओर अवस्थित होंगे।

कंटूर L_2 t-तल पर है और आवश्यकतानुसार अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $-i\infty$ तक फैलता है जिससे यह आश्वस्त हुआ जा सके कि $\Gamma(f_j-F_j t)(j=1, 2, \ldots, m_2)$ के पोल कंटूर के दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1-a_j+\alpha_j s+A_j t)(j=1, 2, \ldots, n_1)$, $\Gamma(1-e_j+E_j t)(j=1, 2, \ldots, n_3)$ के पोल उसके बाईं ओर पड़ेंगे।

(1·1) में परिभाषित फलन x तथा y का वैश्लेषिक फलन होगा यदि

(i). $\theta_2=\sum_{j=1}^{q1}(\beta_j)+\sum_{j=1}^{q2}(\delta_j)-\sum_{j=1}^{p1}(\alpha_j)-\sum_{j=1}^{p2}\gamma_j>0,$

(ii) $\theta_3 = \sum_{j=1}^{q_1} (B_j) + \sum_{j=1}^{q_2} (F_j) - \sum_{j=1}^{p_1} (A_j) - \sum_{j=1}^{p_3} (E_j) > 0,$

(1·1) में समाकल निम्नांकित प्रतिबन्धों के समुच्चय के अन्तर्गत अभिसारी होता है:

(iii) $\phi_2 = \sum_{j=1}^{n_1} (\alpha_j) - \sum_{j=1+n_1}^{p_1} (\alpha_j) - \sum_{j=1}^{q_1} (\beta_j) + \sum_{j=1}^{m_2} (\delta_j) - \sum_{j=m_2+1}^{q_2} (\delta_j) + \sum_{j=1}^{n_2} (\gamma_j) - \sum_{j=n_2+1}^{p_2} > 0,$

(iv) $| \arg x | < \frac{1}{2}\phi_2\pi,$

(v) $\phi_3 = \sum_{j=1}^{n_1} (A_j) - \sum_{j=n_1+1}^{p_1} (A_j) - \sum_{j=1}^{q_1} (B_j) + \sum_{j=1}^{m_3} (F_j) - \sum_{j=m_3+1}^{q_3} (F_j) + \sum_{j=1}^{n_3} (E_j)$

$$- \sum_{j=n_3+1}^{p_3} (E_j) > 0,$$

(vi) $| \arg y | < \frac{1}{2}\phi_3\pi.$

और भी, x, तथा y के लघु मानों के लिये

$$H(x, y) = 0(| x |^{\lambda_2} | y |^{\lambda_3})$$

जहाँ $\lambda_2 = min\ Re\ (d_j/\delta_j)\ j = 1, 2, \ldots, m_2$

$\lambda_3 = min\ Re\ (f_i/F_i) i = 1, 1, \ldots, m_3$

तथा (i) से (vi) तक प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।

2. हमें क्रम से निम्नांकित फलों की आवश्यकता होगी

(i) कौल[7]

$$H \begin{matrix} \ldots \\ \binom{m_2, n_2}{p_2, q_2} \\ \binom{m_3, n_3}{p_3, q_3} \end{matrix} \left| \begin{matrix} \ldots; \ldots \\ (c_{p_2}, \gamma_{p_2}); (d_{q_2}, d_{q_2}) \\ (e_{p_3}, E_{p_3}); (f_{q_3}, F_{q_3}) \end{matrix} \right| \begin{matrix} x \\ \\ y \end{matrix} = H_{p_2, q_2}^{m_2, n_2} \left[x \left| \begin{matrix} (c_{p_2}, \gamma_{p_2}) \\ (d_{q_2}, \delta_{q_2}) \end{matrix} \right. \right]$$

$$\times H_{p_3, q_3}^{m_3, n_3} \left[y \left| \begin{matrix} (e_{p_3}, E_{p_3}) \\ (f_{q_3}, F_{q_3}) \end{matrix} \right. \right] \qquad (2·1)$$

(ii) गुप्ता तथा जैन[5]

$$H_{p_1, q_1}^{m_1, n_1}\left[x \middle| \begin{matrix}(a_1, 1), \ldots, (a_{p_1}, 1)\\(b_1, 1), \ldots, (b_{q_1}, 1)\end{matrix}\right] = G_{p_1, q_1}^{m_1, n_1}\left[x \middle| \begin{matrix}a_1, \ldots, a_{p_1}\\ b_1, \ldots, b_{q_1}\end{matrix}\right] \tag{2·2}$$

(iii) एर्डेल्यी [3, p, 4 (11)]

$$\Gamma(mz) = (2\pi)^{1/2-1/2m}(m)^{mz-1/2} \prod_{i=0}^{m-1}\left[z+\frac{i}{m}\right] \tag{2·3}$$

(iv) एर्डेल्यी [3, p. 3 (2)]

$$\frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} = z(z+1), \ldots, (z+n-1) \tag{2·4}$$

3. **प्रसार-सूत्र**

(i) प्रथम प्रसार सूत्र

$$H\left[(x+y)^{\rho}, (x+y)^{\lambda}\right] = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^r \frac{1}{r!}$$

$$\times H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}0, n_1+1\\ p_1+1, q_1+1\end{pmatrix}\\ \ldots \\ \ldots\end{matrix} \middle| \begin{matrix}(0: \rho, \lambda), (a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1}); (b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1}), (r; \rho, \lambda)\\ \ldots \\ \ldots\end{matrix} \middle| \begin{matrix}y^{\rho}\\ \\ y^{\lambda}\end{matrix}\right] \tag{3·1}$$

बशर्ते कि ρ तथा λ धन पूर्णांक हों तथा अनुभाग 1 में दिए गये प्रतिबन्ध (i) से (vi) तक तुष्ट हों।

(ii) द्वितीय प्रसार सूत्र

$$H\left[(x+y)^{m}, \eta\right] = \sum_{r=9}^{\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^r \frac{1}{r!}$$

$$\times H\left[\begin{matrix}\ldots\\ \begin{pmatrix}m_2, n_2+1\\ p_2+1, q_2+1\end{pmatrix}\\ \ldots\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\ldots \quad ; \quad \ldots\\ (0, \lambda), (c_{p_2}, \gamma_{p_2}); (d_{q_2}, \delta_{q_2}), (r, \lambda)\\ \ldots \quad ; \quad \ldots\end{matrix} \middle| \begin{matrix}x^m\\ \\ \eta\end{matrix}\right] \tag{3·2}$$

जहाँ m धन पूर्णांक है तथा अनुभाग में दिये गये समस्त प्रतिबन्ध तुष्ट हों।

उपपत्ति:

(3·1) को सिद्ध करने के हेतु हमारे पास हैं

$$H[(x+y)^\rho, (x+y)^\lambda] = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s, t), \psi_1(s), \psi_2(t), (x+y)^{\rho s+\lambda t}\, ds\, .\, dt.$$

$(x+y)^{\rho s+\lambda t}$ को द्विपदी प्रमेय के द्वारा प्रसारित करने पर तत्पश्चात समाकलन तथा संकलन के क्रम को परस्पर विनिमय करने पर, जो कि वैध है, दाहिना पक्ष निम्नांकित में समानीत हो जाता है:

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^r \frac{1}{r!} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s, t), \psi_1(s), \psi_2(t) \frac{\Gamma(1+\rho s+\lambda t)}{\Gamma(1-r+\rho s+\lambda t)}\, y^{\rho s+\lambda t}\, ds\, .\, dt.$$

(1·1) की सहायता से (3·3) की व्याख्या करने पर हमें कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत (3·1) की प्राप्ति होती है।

(3·1) की ही भाँति फल (3·2) को भी सिद्ध किया जा सकता है।

4. विशिष्ट दशायें

(i) (3·2) में $n_1 = p_1 = q_1 = 0$ रखने पर तथा (2·1) का प्रयोग करने पर हमें फाक्स का H-फलन सम्बन्धी फल प्राप्त होगा:

$$H_{p_2, q_2}^{m_2, n_2}\left[(x+y)^m \,\middle|\, \begin{matrix}(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\\(d_{q_2}, \delta_{p_2})\end{matrix}\right] = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^r \frac{1}{r!} H_{p_2+1, q_2+1}^{m_2, n_2+1}\left[y^m \,\middle|\, \begin{matrix}(0, \lambda), (c_{p_2}, \gamma_{p_2})\\(d_{q_2}, \delta_{q_2})\,(r, \lambda)\end{matrix}\right] \tag{4·1}$$

(ii) (3·2) में $n_1 = p_1 = q_1 = 0$ रखने पर तथा समस्त γ तथा δ को इकाई मानने पर एवं (2·1), (2·2) तथा (2·3) के उपयोग होने पर यह जैन[6] के फल में समानीत हो जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० यू० सी० जैन का ऋणी है जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में रुचि ली और मार्ग-दर्शन किया।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइं० इंडिया**, 1965, **31**, 536
2. एपेल, पी० तथा कैम्पे द फेरी, जे०, Function Hypergeometrique et Hyperspheriques, polynomes d' Hermite **गाथियर विलार्स पेरिस** 1926

3. एर्डेल्यी, ए०, Higher Trans, Functions **भाग I मैकग्राहिल न्यूयार्क**, 1953
4. गुप्ता, के० सी० तथा मित्तल, पी० के०, **जर्न० प्योर ऐप्लाइड मैथ०**, 1971
5. गुप्ता, के० सी० तथा जैन, यू० सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइं० इंडिया**
6. जैन, एन० सी०, Labder. Sci. Tech. **भाग** 8-A, No. 1. 1970
7. कौल, सी० एल०, The Maths. Education, **भारत** 1970, 4, 40
8. माइजर, सी० एम०, Proc. K. Ned. Aked. Wed., 1952, **14**(4), 369-379
9. वही, **वही**, 1952, **14**(5), 483-487
10. शर्मा, बी० एल०, Annals de Soc. Sci. de Bruxells, 1965, **79**, 26-40

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 3, July, 1976, Pages 197-199

गोलाकार डायोड में निम्न आवृति रव

वाई० के० शर्मा
भौतिक विज्ञान, इन्स्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी,
बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी-5

[प्राप्त—फरवरी 8, 1975]

सारांश

अवकाश आवेश सीमित (SCL) ठोस दशा गोलाकार डायोड में निम्न आवृति रव वोल्टता की स्पेक्ट्रल तीव्रता के लिये एक व्यंजक प्राप्त किया गया है। यह दिखलाया गया है कि रव वोल्टता लाक्षणिक वेग के व्युत्क्रमानुपाती है जो डायोड में प्रविष्ट वाहक घनत्व के विश्रान्ति को बताती है और ऐनोड तथा कैथोड की त्रिज्याओं में अल्प अन्तरों के लिये रव में अत्यधिक कमी आ जाती है।

Abstract

Low frequency noise in the SCL solid state spherical diode. *By* Y. K. Sharma, Physics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi

An attempt has been made to derive an expression for the spectral intensity of the low frequency noise voltage in the space charge limited solid state spherical diode. It is shown that the noise voltage is inversely proportional to the characteristic velocity describing relaxation of the injected carrier density in the diode and the noise is highly reduced for the small differences of the anode and cathode radii.

वान्डर ज़ील (1966) ने एकदैशिक समतलीय धारा प्रवाह के लिये निम्न आवृति रव वोल्टता सम्बन्धी व्यंजक परिगणित किया है। उन्होंने रव वोल्टता के स्पेक्ट्रल घनत्व के लिये व्यंजक प्राप्त किया जो ऐनोड वोल्टता पर निर्भर है। इसी समानता का अनुसरण धारा के गोलाकार प्रवाह वाले ठोस अवस्था डायोड में रव वोल्टता के परिणाम में किया गया है। रव वोल्टता स्तम्भ के भीतर कैथोड से ऐनोड को वाहक घनत्व उच्चावचों के कारण उत्पन्न होती है।

इन्सुलेटर के भीतर किसी एक बिन्दु से धारा प्रवेश (injection) सन्निकटतः गोलीय एकदैशिक धारा प्रवाह होता है। निर्देश[2,3] में कतिपय रोधक गुणधर्मों का अध्ययन प्रस्तुत है। यहाँ पर

केवल वैद्युत रव आचरण के सम्बन्ध में, निम्न आवृति परास के अन्तर्गत विचार किया जा रहा है । ऐनोड वोल्टता उच्चावच $\triangle V_a$ वाहक घनत्व n_0 में वाहक घनत्व उच्चावच δn_0 के कारण उत्पन्न होता है ।

निर्देश (3) के अनुसार n_0 धारा प्रवाह का लाक्षणिक समीकरण तथा एक SCL ठोस अवस्था डायोड में, जिसका गोलाकार प्रवाह है उसमें पॉयसाँ नियम निम्न प्रकार है :

$$I=4\pi q\mu n\, r^2\, E(r) \tag{1}$$

$$\frac{\epsilon\epsilon_0}{q}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2E)=n \tag{2}$$

जहाँ I कुल धारा है, μ सचलता तथा n इलेक्ट्रॉनों का r दूरी पर सान्द्रण है ।

लघु संकेत ac समीकरणों को प्राप्त करने के लिये

$$E=E_0+\triangle E,\;\; n=n_0+\triangle n,\;\; I=I_0+\triangle I$$

लेते हैं और उच्चतर घातांक वाले पदों की उपेक्षा कर दी जाती है । समीकरण (1) तथा (3) से

$$\triangle I=4q\mu r^2[\triangle nE+n\triangle E] \tag{4}$$

इसी प्रकार निर्देश (1, 4) के अनुसार $\triangle I=0$ तथा $\triangle n\simeq\delta n_0$, तो वैद्युत क्षेत्र शक्ति में उच्चावच निम्न रूप धारण करते हैं :

$$\triangle E=-\frac{E(r)}{n(r)}\delta n_0 \tag{5}$$

समीकरण (1) तथा (2) से n को विलुप्त कर देने पर अवकल समीकरण

$$\frac{d(r^2E)^2}{d(r^3)}=\frac{I}{6\pi\epsilon\epsilon_0\mu} \tag{6}$$

प्राप्त होता है जिसका हल

$$E(r)=\left(\frac{I}{6\pi\epsilon\epsilon_0\mu}\right)^{1/2}\frac{(r^3-r_c^3)^{1/2}}{r^2}\;;\; n(r)=\left(\frac{3\epsilon\epsilon_0 I}{8\pi q^2\mu}\right)^{1/2}\frac{1}{(r^3-r_c^3)^{1/2}} \tag{7}$$

है जहाँ r_c कैथोड त्रिज्या है । समीकरण (5) में इन मानों को रखने पर

$$\triangle E=-\frac{2q}{3\epsilon\epsilon_0}\left(r-\frac{r_c^3}{r^2}\right)\delta n_0 \tag{8}$$

समीकरण (8) को r_c तथा r_a समीकरणों के भीतर समाकलित करने पर उच्चावच ऐनोड वोल्टता $\triangle V_a$ निम्न रूप में प्राप्त होती है :

$$\triangle V_a=-\frac{2q\delta n_0}{3\epsilon\epsilon_0}\int_{r_c}^{r_a}\left(r-\frac{r_c^3}{r^2}\right)dr$$

$$=-\frac{q}{3\epsilon\epsilon_0}\left[\frac{(r_a-r_c)^2(r_a+2r_c)}{r_a}\right]\delta n_0 \quad (9)$$

उपर्युक्त समीकरण का फूरियर विश्लेषण करने पर

$$Sv_a(f)=4kTR_n=\frac{q^2}{9\epsilon^2\epsilon_0^2}\left[\frac{(r_a-r_c)^2(r_a+2r_c)}{r_a}\right]^2 Sn_0(f) \quad (10)$$

जहाँ R_n रव प्रतिरोध है और $Sn_0(f)$ प्रविष्ट वाहक घनत्व उच्चावचों का स्पेक्ट्रल घनत्व है। $Sn_0(f)$ के मान को निर्देश (3) से प्रतिस्थापित करके निम्नवत् प्राप्त करते हैं

$$Sn_0(f)=\frac{4n_0}{Av_c} \quad (11)$$

जहाँ n_0 वाहक घनत्व A डायोड का काट क्षेत्रफल है तथा v_c लाक्षणिक वेग है जो वाहक घनत्व उच्चा-वचों की विश्रान्ति को बताता है। समीकरण (11) को समीकरण (10) में प्रतिस्थापित करने पर

$$4kTR_n=\frac{q^2}{9\epsilon^2\epsilon_0^2}\left[\frac{(r_a-r_c)^2(r_a+2r_c)}{r_a}\right]^2\frac{4n_0}{Av_c} \quad (12)$$

उपर्युक्त समीकरण में ऐनोड वोल्टता नही है। ऐनोड वोल्टता द्वारा वाहकों का सान्द्रण n_0 नियन्त्रित होता है। फिर भी लाक्षणिक वेग डायोड के पदार्थ पर निर्भर करता है[1] यदि $r_a \gg r_c$, तो रव ऐनोड त्रिज्याओं (r_a) के चतुर्थ घात के प्रत्यक्ष समानुपाती होता है। इस प्रकार उच्चतर ऐनोड त्रिज्याओं के लिये रव अत्यधिक बढ़ जाता है। यद्यपि रव को कैथोड त्रिज्यायें बढ़ाकर तेजी से दमित किया जा सकता है। r_a (समीकरण 12 से) की तुलना में (r_c) अर्थात् (r_a-r_c) लघु है।

निर्देश

1. वाण्डर ज़ील, ए०, Solid State Electron. 1966, **9**, 123.
2. विनार्डसन, आर० के० तथा बियर, ए० सी०, Semiconductor and Semimetals, भाग 6 **एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क**, 1970.
3. लैम्पर्ट, एम० ए० तथा मार्क, पी० Current Injection in Solids, **एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क**, 1970
4. शर्मा, वाई० के०, Can. J. Phys. 1974, **52**, 399.
5. वही, **इण्डि० जर्न० प्योर एण्ड ऐप्ला० फिजि०**, 1974, **12**, 524.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 3, July 1976, Pages 201-204

सार्वीकृत बेटमान फलन सम्बन्धी समाकल समीकरण

एल० ए० दीक्षित तथा बी० के० जोशी
गणित विभाग, राजकीय इंजीनियरी तथा टेक्नालाजी महाविद्यालय, रायपुर

[प्राप्त—मार्च 25, 1976]

सारांश

सार्वीकृत बेटमान फलन सम्बन्धी समाकलसमीकरण हल किया गया है ।

Abstraet

An integral equation involving generalised Bateman function. *By* L. A. Dixit and B. K. Joshi, Department of Mathematics, Government College of Engineering and Technology, Raipur, M. P.

An integral equation involving generalised Bateman's function has been solved.

· भूमिका

$$\int_0^x k(x-t)\, g(t)\, dt=f(x) \tag{1.1}$$

वर्ग के समाकल समीकरणों के हलों का सूत्रपात विडर [8] ने किया है । इसे बाद यह समीकरण विभिन्न अथवा अधिक सामान्य अष्टि के साथ अध्ययन का विषय बनता रहा ।

भारतीय [1] ने सर्वीकृत बेटमान फलन सम्बन्धी संवलन परिवर्त का प्रतिलोमन प्रस्तुत किया है । उसी अष्टि के साथ जोशी [4, 6] ने भी (1.1) के कुछ प्रतिलोमन समाकल स्थापित किये हैं ।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य उसी अष्टि के साथ (1.1) का प्रतिलोमन करके अन्य फल प्राप्त करना है । स्थापित प्रमेय का उपयोग एक सान्त समाकल का मान ज्ञात करने के लिये किया गया है ।

2. वांछित फल

लैप्लास परिवर्त $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt=F(p),\ Rep>0$

को हम सांकेतिक रूप में

$$f(t) \doteqdot F(p) \tag{2.1}$$

द्वारा व्यक्त करेंगे । निम्नांकित फल एर्डेल्यी [3] के हैं :

$$f^n(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) \ldots f^{n-1}(0). \tag{2.2}$$

$$\int_0^t f_1(u) f_2(t-u)\, du = F_1(p) \cdot F_2(p) \tag{2.3}$$

जहाँ $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$ तथा $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$.

$$t^{u-1/2} M_{k_1\mu}(at) \doteqdot \frac{a^{\mu+1/2} (2\mu_{+1}) (p-a/2)^{k-\mu-1/2}}{(p+a/2)^{k+\mu+1/2}}$$

$$\mu > -1/2$$

सार्वीकृत बेटमान फलन $K_n^l(x)$ को

$$K_n^l(x) = \int_0^{\pi/2} (2\cos\theta)^l \cos(x\tan\theta - n\theta) d\theta$$

के रूप में परिभाषित करते हैं जहाँ $l > -1$

$(n-l-1)$ तथा $(n+l)$ को अनृण पूर्ण संख्यायें मानने पर जिसमें शून्य सम्मिलित है हमें चक्रवर्ती [2] का फल

$$K_{2n}^{2l}(\tfrac{1}{2}x) = \frac{(-1)^{n-l-1} e^{1/2\, x}}{\Gamma n+l+1} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-l-1} [e^{-x} x^{n+l}]$$

$2l > -1$ के लिये प्राप्त होता है ।

(2.5) के व्यवहार से हमें

$$K_{2n}^{2l}(at) \doteqdot \frac{(-1)^{n-l-1} (2a)^{2l+1} (p-a)^{n-l-1}}{(p+a)^{n+l+1}}$$

प्राप्त होता है ।

अपना प्रमेय सिद्ध करने के पूर्व हम निम्नांकित फल को स्थापित करेंगे

$$I \equiv \int_y^x K_{2n}^{2l} [a(x-t)] (t-y)^{-l-3/2} M_{n-1/2,\, l-1} [2a(y-t)] = Ae^{-a(x-y)} \tag{2.7}$$

जहाँ $$A = (-1)^{n-2l-3/2} (2a)^{l+1/2} \Gamma - 2l - 1 \tag{2.8}$$

(2.7) में $(t-y) = v$ एवं $x-y = u$ रखने पर तथा (2.3) (2.4) और (2.6) का उपयोग करने पर हमें (2.7) की प्राप्ति होती है ।

3. प्रमेय : यदि

(a) $\frac{d}{dy}[e^{ay}\ f(y)]$ खंडश: $0 \leqslant x < x_1 < \infty$ में संतत हो

(b) $f(0)=0$

तथा (c) n और l ऐसी भिन्न संख्यायें हों कि $(n-l-1)$ तथा $(n+l)$ अनृण पूर्ण संख्यायें हैं और $l>-1$ तो समाकल समीकरण

$$\int^{x} K_{2n}^{2l}\,[a(x-t)]\,g(t)\,dt = f(x) \tag{3.1}$$

का हल

$$g(t)=\frac{1}{A}\int_0^t (t-y)^{-l-3/2}\ M_{n-1/2,-l-1}^{[2a(y-t)]}\ e^{-ay}\frac{d}{dy}[e^{ay} f(y)]\ dy$$

होगा जहाँ A को (2.8) के द्वारा दिया जाता है।

उपपत्ति :

(3.1) के बाईं ओर (3.2) से $g(t)$ का प्रस्तावित मान रखने पर, समाकल का क्रम बदलने तथा (2.7) का व्यवहार करने पर

$$\int_0^x e^{-ax}\frac{d}{dy}(e^{ay} f(y))\ dy$$

प्रतिबन्ध $f(0)=0$ के अन्तर्गत प्रमेय सिद्ध हो जाता है।

4. इस अनुभाग में हम अपने प्रमेय का उपयोग एक समाकल का मान ज्ञात करने के लिये करेंगे। हमारे समक्ष है सर्वसमिका

$$\left[\frac{(2a)^{\mu+1/2}\ \Gamma 2\mu+1\ (p-a)^{k-\mu-1/2}}{\{p+a\}^{k+\mu+1/2}}\right]\cdot\left[\frac{(-1)^{n-l-1}\ (2a)^{2l+1}\ (p-a)^{n-l-1}}{(p+a)^{n+l+1}}\right]$$
$$=\frac{(-1)^{n-l-1}\ \Gamma 2\mu+1\ (2a)^{\mu+2l+3/2}\ .\ (p-a)^{(k+n)\ (\mu+l+1)-1/2}}{(p+a)^{(k+n)+(\mu+l+1)+1/2}}$$

(2.3) तथा (2.4) का उपयोग करने पर

$$\int_0^t \eta^{\mu-1/2}\ M_{k,\mu}\ (a\eta)\ K_{2n}^{2l}\ \ [a(t-\eta)]\ d\eta=\frac{(-1)^{n-l-1}\ \Gamma 2\mu+1}{\Gamma 2\mu+2l+3}\ \ M_{k+n,\ \mu+l+1}\ (2at)$$

(4.1) की तुलना (3.1) से करने पर हमें

$$f(t)=\frac{(-1)^{n-l-1}\ \Gamma 2\mu+1}{\Gamma 2\mu+2l+3}\ M_{k+n,\ \mu+l+1}\ (2at)$$

तथा $g(t)=t^{\mu-1/2}\ M_{k_1\ \mu}\ (2at)$ प्राप्त होते हैं।

(2.2) में $f(t)$ तथा $g(t)$ के मान रखने पर

$$\int_0^t (t-y)^{-l-3/2} M_{n-1/2,-l-1} [2a(y-t)]e^{-ay} \frac{d}{dy} M_{k+n, \mu+l+1} (2ay)]dy$$
$$= A \frac{(-1)^{n-l-1} \Gamma 2\mu+2l+3}{\Gamma 2\mu+1} \times [t^{\mu-1/2} M_{k, \mu} (2at)].$$

जहाँ A को (2.8) के द्वारा परिभाषित किया जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय श्री आर० ए० देशपाण्डे के कृतज्ञ हैं जिन्होंने कार्य करने की सुविधा प्रदान की।

निर्देश

1. भारतीय, पी० एल०, **जर्न० इण्डि० मैथ० सोसा०**, 1967, **28**, 163
2. चक्रवर्ती, एन० के०, **बुलें० कलकत्ता मैथ० सोसा०**, 1953, 45,
3. एर्डेल्यी, ए० Tables of Integral transforms **भाग I, मैकग्राहिल न्यूयार्क**, 1954
4. जोशी, बी० के०, The Mathematics Student, 1974, **XLII**, 183
5. वही, **इण्डि० जर्न० प्योर एप्ला० मैथ०** (स्वीकृत)
6. वही, **विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका**, 1975, **18**, 319-23.
7. श्रीवास्तव, के० एन०, **प्रोसी० ग्लास्गो० मैथ० एसो०**, 1961, **7**, 125
8. विडर, डी० के०, **अमे० मैथ० मंथली**, 1963, **70**, 291

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 19, No 3, July, 1976, Pages 205-212

कतिपय चिरप्रतिष्ठित बहुपदों एवं फलनों वाला संक्रियात्मक सूत्र

पी० एम० अत्रि
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, कृषि महाविद्यालय, रीवाँ
[प्राप्त—जुलाई 12, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में जैकोबी बहुपदों के लिये अधिक सामान्य संक्रियात्मक सूत्र विकसित किया गया है और कई फल प्राप्त किये गये हैं ।

Abstract

An operational formula involving certain classical polynomials and functions. *By* P. M. Attri, Department of Mathematics and Statistics, Collge of Agriculture, Rewa (M.P.).

In the present paper a more general operation formula for Jacobi polynomials has been developed and a number of new results obtained.

1. विषय प्रवेश

मुनोट तथा सक्सेना[7] ने जैकोबी बहुपदों के लिये संक्रियामक सूत्र

$$\prod_{j=1}^{n} [(x^2-1)D+\alpha(x+1)+\beta(x-1)+2xj]=\sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!} 2^{n-r}(x^2-1)^r P_{n-r}^{(\alpha+r,\ \beta+r)}(x)\ D^r \tag{1.1}$$

प्राप्त किया है जहां $D=\dfrac{d}{dx}$ जो कार्लिट्ज[3] द्वारा लागेर बहुपदों के लिये तथा बर्चनाल[2] द्वारा हर्माइट बहुपदों के लिये क्रमशः संगत है ।

$$\prod_{j=1}^{n}(x\ D-x-\alpha+j)=n!\sum_{r=0}^{n} \frac{x^r}{r!} L_{n-r}^{\alpha+r}(x)\ D^r \tag{1·2}$$

$$(D-2x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^{n-r} H_{n-r}(x)\ D^r \tag{1·3}$$

(1·2) तथा (1·3) को सार्वीकृत करने के प्रयास में गूल्ड तथा हापर[6] ने सूत्र (1·4) की स्थापना की है।

$$\prod_{j=1}^{n} (\chi D - prx^r + a - j = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^n \overset{r}{H}_{n-k}(x, a, p) D^k \quad (1{\cdot}4)$$

यहाँ $L_n(x)$ के द्वारा लागेर बहुपद $H_n(x)$ से हर्माइट बहुपद एवं $\overset{r}{H}_n(x, a, p)$ द्वारा सार्वीकृत हर्माइट बहुपद को अंकित करते हैं और

$$\overset{\alpha}{L}_n(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} D^n (x^{\alpha+n} e^{-x}), \quad (I{\cdot}5)$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n (e^{-x^2}), \quad (1{\cdot}6)$$

एवं

$$\overset{r}{H}_n(x, a, p) = (-1)^n x^{-\alpha} cxp(px^r) D^n [x^\alpha e^{-pr}] \quad (1{\cdot}7)$$

द्वारा परिभाषित हैं।

चटर्जी[4] तथा अल-सलाम[1] ने भी कतिपय बहुपदों अथवा ज्ञात बहुपदों के लिये वैकल्पिक विधियों से नवीन सूत्र प्राप्त करने के प्रयास किये हैं।

प्रस्तुत शोधपत्र में जैकोबी बहुपदों के लिये अधिक सामान्य संक्रियात्मक सूत्र विकसित किया गया है और कई फल प्राप्त किये गये हैं जिनमें गेगेनबावर, चेबीचेफ बहुपद, ह्विटेकर फलन आदि सन्निहित हैं।

2. हमें निम्नांकित फलों की आवश्यकता होगी जिन्हें सिद्ध किया जा रहा है

$$(ax+b)^{-\alpha} D^m[(ax+b)^{n+\alpha}] = \frac{a^m (1+\alpha)_n}{(1+\alpha)_{n-m}} (ax+b)^{n-m}. \quad (2{\cdot}1)$$

$$\prod_{j-1}^{m} a^m \left[\frac{ax+b}{a} D + \alpha + n - m + j\right] y = (ax+b)^{-\alpha-n+m} D^m[(ax+b)^{n+\alpha} y] \quad (2.2)$$

$$(bx+b)^{-\alpha-n} D^m[(ax+b)^{\alpha+n} y] = \left(\frac{a}{ax+b}\right)^m \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \frac{(1+\alpha)_n}{(1+\alpha)_{n-m+r}} \left(\frac{ax+b}{a}\right)^r D^r(y)$$

$$(2{\cdot}3)$$

तथा $ax+b)^{-\alpha}(cx+d)^{-\beta} D^n[(ax+b)^{\alpha+n}(cx+d)^{\beta+n} y]$

$$= \prod_{j=1}^{n} (ac)^n \left[\frac{(ax+b)(cx+d)}{ac} D + \frac{\alpha(cx+d)}{c}\right.$$

$$\left. + \frac{\beta(ax+b)}{a} + \left(\frac{cx+d}{c} + \frac{ax+b}{a}\right) j\right] (y) \quad (2{\cdot}4)$$

$(ax+b)^{\alpha+n}$ को क्रमागत रूप से m बार अवकलित करने पर फल (2·1) की स्थापना की जा सकती है। स्पष्ट ही है कि फल (2·2) $m=1$ तथा 2 के लिये सत्य है। इसकी सत्यता को $(m-1)$ तक मानने पर निगमन द्वारा

$$\prod_{j=1}^{m} a^m \left[\frac{ax+b}{a} D+\alpha+n-m+j\right]=\prod_{j=1}^{m-1} a^{m-1} \left[\frac{ax+b}{a} D+\alpha+n-m+1+j\right]$$

$$\times \left[a\left(\frac{ax+b}{a} D+\alpha+n\right)\right]y,$$

$$=(ax+b)^{-\alpha-n+m-1} D^{m-1}\left[(ax+b)^{\alpha+n-1} a\left\{\frac{ax+b}{a} D+\alpha+n\right\}\right](y),$$

$$=(ax+b)^{-\alpha-n+m} D^m[(ax+b)^{\alpha+n} y].$$

(2·2) में $a=1$, $b=0$ तथा $m=n$ रखने पर चटर्जी[4] द्वारा दिया गया सूत्र

$$x^{-\alpha} D^n[x^{n+\alpha} y]=\prod_{j=1}^{n} (xD+\alpha+j)(y)$$

प्राप्त होता है। (2·3) में बाईं ओर लेबनिट्ज प्रमेय का सम्प्रयोग करने तथा (2·1) का उपयोग करने पर दाहिना पक्ष प्राप्त होता है।

फल (2·2) में $Y=(cx+d)^{n+\beta} Y$, $m=n$ रखने तथा दोनों ओर $(cx+d)^{-\beta}$ से गुणा करने एवं फल (2·2) की उपपत्ति जैसी विधि का अनुसरण करने पर निगमन द्वारा फल (2·4) की प्राप्ति होती है।

3. इस अनुभाग में जैकोबी बहुपदों वाले संक्रियात्मक सूत्र की स्थापना की जावेगी। जिस फल को सिद्ध करना है वह है:

$$\prod_{j=1}^{n} (ac)^n \left[\frac{(ax+b)(cx+d)}{ac} D+\alpha \frac{cx+d}{c}+\beta \frac{ax+b}{a}+\left(\frac{cx+b}{c}+\frac{ax+b}{a}\right)j\right](y)$$

$$=\sum_{r=0}^{m} \frac{n!}{r!} (ad-bc)^n \left\{\frac{(ax+b)(cx+d)}{ad-bc}\right\}^r P_{n-y}^{(\alpha+r,\ \beta+r)}\left[2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right] D^r(y) \qquad (3·1)$$

उपपत्ति

(2·3) में $Y=(cx+d)^{n+\beta}$ रखने पर

$$(ax+b)^{-\alpha-n+m} D^m[(ax+b)^{n+\alpha}(cx+d)^{n+\beta}]$$

$$=\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \frac{a^m(1+\alpha)_n}{(1+\alpha)_{n-m+r}} \left(\frac{ax+b}{a}\right)^r D^r[(cx+d)^{n+\beta}]$$

$$=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\frac{(ac)^m(cx+d)^{\beta+n-m}(1+}{(1+\alpha)_{n-m+r}(1+\beta)_{n-r}}\left(\frac{ax+b}{a}\right)^r\left(\frac{cx+d}{c}\right)^{m-r}.$$

अथवा

$$(ax+b)^{-\alpha}(cx+d)^{-\beta}D^m[(ax+b)^{n+\alpha}(cx+d)^{n+\beta}]$$

$$=\left[\frac{(ax+b)(cx+d)}{ac}\right]^{n-m}(ac)^n m!\sum_{r=0}^{m}\left[\frac{(1+\alpha+n-m)_m}{(1+\alpha+n-m)_r}\right.$$

$$\left.\times\frac{(1+\beta+n-m)_m}{(1+\beta+n-m)_{m-r}}\left(\frac{ax+b}{a}\right)^r\left(\frac{cx+d}{c}\right)^{m-r}\frac{1}{(m-r)!\,r!}\right]. \qquad (3\cdot2)$$

सूत्र [8, 255 (5)] में α के स्थान पर $(\alpha+n-m)$, $(\beta+n-m)$ के स्थान पर, β: $n=m$ तथा $x=\left(2a\dfrac{cx+d}{ad-bc}-1\right)$ रखने पर

$$P_m^{(\alpha+n-m,\ \beta+n-m)}\left[2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right]=\sum_{r=0}^{m}\frac{(1+\alpha+n-m)_m(1+\beta+n-m)_m}{(1+\alpha+n-m)_r(1+\beta+n-m)_{m-r}}$$

$$\times\left(\frac{ax+b}{a}\right)^r\left(\frac{cx+d}{c}\right)^{m-r}\frac{1}{(m-r)!\,r!} \qquad (3\cdot3)$$

(3·2) में (3·3) के व्यवहार से

$$(ax+b)^{-\alpha}(cx+d)^{-\beta}D^m[(ax+b)^{n+\alpha}(cx+d)^{n+\beta}]$$

$$=\left[\frac{(ax+b)(cx+d)}{ad-bc}\right]^{n-m}(ad-bc)^m\, m!\, P_n^{(\alpha+n-m,\ \beta+n-m)}\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right). \qquad (3.4)$$

(2·4) के दाहिने पक्ष में लीबनिट्ज प्रमेय को सम्प्रयुक्त करने तथा (3·4) के प्रयोग से

$$(ax+b)^{-\alpha}(cx+d)^{-\beta}D^m[(ax+b)^{n+\alpha}(cx+d)^{n+\beta}\,y]$$

$$=\sum_{r=0}^{m}\frac{m!}{r!}\left\{\frac{(ax+b)(cx+d)}{ad-bc}\right\}^{n-m+r}(ad-bc)^n\,P_{n-r}^{(\alpha+n-m+r,\ \beta+n-m+r)}$$

$$\times\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right)D^r(y). \qquad (3\cdot5)$$

(3·5) में $m=n$ रखने पर एवं (2.4) से तुलना करने पर फल (3·1) प्राप्त होता है ।

4. निगमन

I (3·1) में $a=c=d=1$ एवं $b=-1$ रखने पर हमें सरलता से फल (1·1) प्राप्त हो सकता है।

II (3·1) में $a=c=\frac{1}{2}$, $b=-1$ एवं $d=1$ रखने से हमें निम्नांकित फलन प्राप्त होता है

$$\prod_{j=1}^{n} [(x^2-4)D+(\alpha+\beta+2j)\ x+2+(\alpha-\beta)]y=2^{2n}\ n!$$

$$\times \sum_{r=0}^{n} \frac{(x^2-4)^r}{2^{2r}} P_{n-r}^{(\alpha+r,\ \beta+r)}\ (x/2)D^r(y). \qquad (4{\cdot}1)$$

III यदि (4·1) में स्वतन्त्र चर को $x=2\sec\theta$ रख कर त्रिकोणमितीय फलन में रूपान्तरित कर दिया जाय तो

$$\prod_{j=1}^{n} 2j\ [\sin\theta D'+(\alpha+\beta+2j)\sec\theta+(\alpha-\beta)]\ y=2^{2n}\ n!$$

$$\times \sum_{r=0}^{n} \tan 2^r\ \theta\ P_{n-r}^{(\alpha+r,\ \beta+r)}\ (\sec\theta)\ D^r(y) \qquad (4{\cdot}2)$$

जहाँ $D'=\frac{d}{d\theta}$.

5. सम्प्रयोग

I (3·1) में $Y=1$ रखने पर

$$\prod_{j=1}^{n} (ac)^n \left[\frac{(ax+b)(cx+d)}{ac} D+\alpha \frac{cx+d}{c}+\beta \frac{ax+b}{c}+\left(\frac{cx+d}{c}+\frac{ax+b}{a}\right)j\right]$$

$$=(ad-bc)^n\ n!\ P_n^{(\alpha,\ \beta)}\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right). \qquad (5{\cdot}1)$$

(5·1) में n के स्थान पर $(n+m)$ रखने से

$$\prod_{j=1}^{n} (ac)^n \left[\frac{(ax+b)(cx+d)}{ac} D+\alpha\frac{cx+d}{c}+\beta\frac{ax+b}{a}+\left(\frac{cx+d}{c}+\frac{ax+b}{a}\right)j\right]$$

$$\times \prod_{p=1}^{m} (ac)^m \left[\frac{(ax+b)(cx+d)}{ac} D+(\alpha+n)\frac{cx+d}{c}+(\beta+n)\frac{ax+b}{a}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{cx+d}{c}+\frac{(ax+p)}{a}\right)\mathrm{j}\right]\times(1)$$

$$=(ad-bc)^{n+m}(n+m)!\ P_{n+m}^{(\alpha,\ \beta)}\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right),$$

(5·1) के सम्प्रयोग से

$$\prod_{j=1}^{n} (ac)^n \left[\frac{(ax+b)(cx+d)}{ac} D+\alpha \frac{cx+d}{c}+\beta \frac{ax+b}{a}+\left(\frac{cx+d}{c}+\frac{ax+b}{a}\right)j\right]$$

$$\times P_m^{(\alpha+n,\ \beta+n)}\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right)=(ad-bc)^n\frac{(m+n)!}{m!}\ P_{m+n}^{(\alpha,\ \beta)}\left(2a\frac{cx+d}{ad-dc}-1\right). \tag{5·2}$$

II (3·1) में y के स्थान पर $P_m^{(\alpha+n,\ \beta+n)}\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right)$ रखने से तथा (52·) का उपयोग करने से

$$P_{n+m}^{(\alpha,\ \beta)}\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right)=\frac{n!\ m!}{(m+n)!}\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\left\{\frac{2(ax+b)(cx+d)}{ac}\right\}^r$$

$$\times P_{m-r}^{(\alpha+r,\ \beta+r)}\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right) D^r\left[P_m^{(\alpha+n,\ \beta+n)}\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right]\right].$$

[8, 263 (3)] में x के स्थान पर $\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right)$, α by $(\alpha+n)$ तथा β के स्थान पर $(\beta+n)$ रखने से

$$P_{m+n}^{(\alpha,\ \beta)}\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right)=\frac{m!\ n!}{(m+n)!}\sum_{r=0}^{n,\ m(min)}\left[\left(\frac{ac}{ad-bc}\right)^r\left\{\frac{(ax+b)(cx+d)}{ad-bc}\right\}^r\right.$$

$$\times\frac{(1+\alpha+\beta+2n+m)_r}{r!}\ P_{m-r}^{(\alpha+n+r,\ \beta+n+r)}\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right)\ P_{n-r}^{(\alpha+r,\ \beta+r)}2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\Bigg). \tag{5·3}$$

III अपरंच (3·1) में $Y=x$ रखने से

$$\prod_{j=1}^{n} (ac)^n\left[\frac{(ax+b)(cx+d)}{ac}+\alpha\frac{cx+d}{c}+\beta\frac{ax+b}{a}+\left(\frac{ax+b}{a}+\frac{cx+d}{c}\right)j\right](x)$$

$$=n!\ (ad-bc)^n\left[x\ P_n^{(\alpha,\ \beta)}\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right)+\frac{(ax+b)(cx+d)}{ad-bc}\right.$$

$$\left.\times P_{n-1}^{(\alpha+1,\ \beta+1)}\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right)\right]. \tag{5·4}$$

IV निम्नांकित फल की प्राप्ति [8, 283 (2)][8, 279 (17)] तथा [8, 277 (5)] एवं $\alpha=(\nu-\frac{1}{2})$ के प्रयोग से x के स्थान पर $\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right)$ और n के स्थान पर $n-r$ रखने से

$$P_{n-r}^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)}\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right)=\frac{(\nu+\frac{1}{2})_{n-r}}{(2\nu)_{n-r}}\, C_{n-r}^{\nu}\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right).$$

(3·1) में (5·5) को $\alpha=\beta=(\nu-\frac{1}{2})$ के साथ प्रतिस्थापित करने से

$$\prod_{j=1}^{n}(ac)^n\left[\frac{(ax+b)(cx+d)}{ac}D+(\nu-\tfrac{1}{2}+j)\left(\frac{ax+b}{a}+\frac{cx+d}{c}\right)\right]y$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!}\left[\left(\frac{(ax+b)(cx+d)^r}{ad-bc}\right)^r(ad-bc)^n\frac{2^{2r}(\nu+\frac{1}{2})_n(\nu)_r}{(2\nu)_{n+r}}C_{n-r}^{\nu+r}\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right)\right.$$

$$\times D^r(y). \qquad (5\cdot6)$$

जहाँ $C_n^{\nu}(x)$ गेगनबावर बहुपद है जिसे [8, 283 (1)] द्वारा परिभाषित किया जाता है।

V (3·1) में $Y=1$, $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ रखने से तथा [8, 301 (1)] और (5·1) का उपयोग करने पर

$$\prod_{j=1}^{n}(ac)^n\left[\frac{(ax+b)(cx+d)}{ac}D+(j-\tfrac{1}{2})\left(\frac{ax+b}{a}+\frac{cx+d}{c}\right)\right]\times(1)$$

$$=(ad-bc)^n(\tfrac{1}{2})_n\,T_n\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right). \qquad (5\cdot7)$$

जहाँ $T_n(x)$ चेबीचेफ बहुपद है जिसे $T_n(x)=n!/(\frac{1}{2})_n\, P_n^{(-1/2,\, -1/2)}(x)$ द्वारा परिभाषित करते हैं।

VI (3·1) में $Y=e^{-x}x^{\beta-\alpha+r-1}\psi(\alpha,\beta;x)$ रखने पर [5, 257 (3)] एवं [5, 258 (15)] का उपयोग करने पर और x के स्थान पर $\left(2a\frac{cx+d}{ad-bc}-1\right)$, a के स्थान पर α तथा b के स्थान पर β रखने पर

$$\prod_{j=1}^{n}(ac)^n\left(\frac{ad-bc}{2ac}\right)^j\left[\left(\frac{ad-bc}{2ac}\right)^2(\xi^2-1)D+\xi(\alpha+\beta+2j)+(\alpha-\beta)\right]e^{-\xi}\xi^{\beta-n+r-1}$$

$$=\sum_{r=0}^{n}(ad-bc)^n\frac{n!}{r!}\left(\frac{1-\xi^2}{2}\right)^r e^{-\xi}\xi^{\beta-\alpha-1}P_{n-r}^{(\alpha+r,\,\beta+r)}(\xi)\psi(\alpha-r,\beta;\xi). \qquad (5\cdot8)$$

जहाँ $\xi=\left(2a\frac{cd+d}{ad-bc}-1\right)$ और $\psi(\alpha,\beta;x)$ फलन ψ है जो [5, 257 (3)] द्वारा परिभाषित होता है।

फल (5·6) को व्हिटेकर फलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है [5, 264 (4)] एवं [5, 258 (15)] का उपयोग करने पर

$$\prod_{j=1}^{n} (ac)^n \left(\frac{ad-bc}{2ac}\right)^j \left[\left(\frac{ad-bc}{2ac}\right)^2 (\xi^2-1)D+(\alpha+\beta+2j)\xi+(\alpha-\beta)\right]$$

$$\times e^{-\xi/2}\xi^{\beta/2-\alpha+r-1}W_{(1/2\beta-\alpha,\ 1/2\beta-1/2)}(\xi)=n!\,(ad-bc)^n$$

$$\times \xi^{1/2\beta-\alpha-1}\, e^{-1/2\,\xi} \sum_{r=0}^{n} \left[\left(\frac{1-\xi^2}{2}\right)\frac{1}{r!}\, P_{n-r}^{(\alpha+r,\ \beta+r)}(\xi)\right.\ W^{(1/2\beta-\alpha+r,\ 1/2\beta-1/2)}(\xi) \quad (5\cdot9)$$

जहाँ $W^{(k,\ \mu)}(\xi)$ व्हिटेकर फलन है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० आर० सी० वर्मा के प्रति कृतज्ञता प्रकट करता है जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में सहायता पहुँचाई।

निर्देश

1. अल-सलाम, डब्लू० ए०, Duke Math. J. 1964, **31**, 127-142.
2. बर्चनाल, जे० एल०, **क्वार्ट० जर्न० मैथ० (आक्सफोर्ड)**, 1941, **12**, 9-11.
3. कार्लिट्ज, एल०, **मिशिगन मैथ० जर्न०**, 1960, **3**, 219-23.
4. चटर्जी, एस० के०, **क्वार्ट० जर्न० मैथ० (आक्सफोर्ड)**, 1963, **14**, 241-46.
5. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Transcedental Functions. **भाग I बेटमान मैनुस्क्रिप्ट प्रोजेक्ट**
6. गूल्ड, एच० डब्लू० तथा हापर, ए० टी०, Duke Math. J. 1962, **29**, 51-64.
7. मुनोट, पी० सी० तथा सक्सेना, आर० के०, The Mathematics Student 1972, **XL A**, 139-146.
8. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, **मैकमिलन एंड कम्पनी, न्यूयार्क**, 1963.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No 3, July, 1976, Pages 213-219

बेलनाकार संमिति में ऊष्मा संचलन का काल उत्क्रमण निर्मेय

बी० एस० मेहता
गणित विभाग राजकीय कालेज, शाहपुरा

तथा

एस० एल० माथुर
गणित विभाग, राजकीय कालेज, नाथद्वारा

[प्राप्त—अक्टूबर 21, 1975]

सारांश

ज्ञात सीमा प्रतिबन्धों वाली ऊष्मागतिक प्रणाली में काल उत्क्रमण संचलन निर्मेय का हल सान्त बेलनाकार कोश के लिये समाकल परिवर्त विधि की सहायता से किया गया है।

Abstract

Time reversal problem of heat conduction in cylindrical symmetry. *By* B. S. Mehta, Department of Mathematics, Government College, Shahapura and S. L. Mathur, Department of Mathematics, Government College, Nathdwara.

Time reversal heat conduction problem in thermodynamic system with known boundary conditions has been solved with the help of 'Integral transform method' for a finite cylindrical shell.

1. प्रस्तावना

जब ताप $T(T>0)$ पर ताप वितरण तथा उपयुक्त सीमा प्रतिबन्ध दिये हुये हों तो पूरे माध्यम में ताप के प्रारम्भिक वितरण को काल उत्क्रमण निर्मेय के नाम से जाना जाता है। इन निर्मेयों का ऊष्मागतिकी में काफी महत्व है और किसी समय तथा स्थिति में ताप ज्ञात करते समय, विशेषतया जब किसी क्षण ताप $T(T>0)$ ज्ञात हो, इनका विशेष महत्व है।

साभरवाल [5] ने संक्रियात्मक विधियों की सहायता से कतिपय काल उत्क्रम निर्मेयों की विवेचना की है किन्तु इनमें ऊष्मा स्रोत तथा विकिरण का अभाव था। मेहता [4], मार्ची तथा जग्राब्लिच [2] द्वारा परिभाषित समाकल परिवर्त की सहायता से क्षणिक ऊष्मा संचलन की ऊष्मागतिक प्रणाली के परिप्रेक्ष्य में काल उत्क्रमण निर्मेयों का अध्ययन किया है।

प्रस्तुत शोध पत्र में काल उत्क्रमण निर्मेय को उष्मागतिक प्रणाली के परिपेक्ष्य में निश्चित ऊँचाई के बेलनाकार कोश में क्षणिक ऊष्मा संचलन के द्वारा सिद्ध किया गया है जिसमें मार्ची तथा जग्राब्लिच [3] द्वारा दिये गये सार्वीकृत हैंकेल परिवर्त का उपयोग किया गया है।

2. अभिप्रेत फल

मार्ची तथा जग्राब्लिच [3] ने सार्वीकृत हैंकेल परिवर्त को

$$\bar{f}(n)=\int_a^b r\, f(r)\, S_p\,(\alpha,\beta,\mu_n r)\, dr, \tag{2.1}$$

के रूप मे परिभाषित किया है जहाँ

$$S_p(\alpha,\beta,\mu_n r)=J_p\,(\mu_n r)\,[Y_p(\alpha,\mu_n a)+Y_p(\beta,\mu_n b)] - Y_p(\mu_n r)\,[J_p(\alpha,\mu_n a)+J_p(\beta,\mu_n b)] \tag{2.2}$$

जिसमें μ_n समीकरण

$$J_p(\alpha,\mu a)\,Y_p(\beta,\mu b)-J_p(\beta,\mu b)\,Y_p(\alpha,\mu a)=0 \tag{2.3}$$

का ऐसा मूल है जिससे कि

$$J_p(s,\mu r)=s_1 J_p\,(\mu r)+s_2\,\mu\,J'\,(\mu r) \tag{2.4}$$

$$Y_p(s,\mu r)=s_1\,Y_p(\mu r)+s_2\,\mu\,Y'_p\,(\mu r) \tag{2.5}$$

(2.1) का प्रतिलोमन प्रमेय

$$f(r)=\sum_n(1/C_n)\,\bar{f}_p(n)\,S_p(\alpha,\beta,\mu_n r) \tag{2.6}$$

है जहाँ संकलन को समीकरण (2.3) के घनमूलों के लिये लिया जाता है और c_n का मान

$$C_n=b^2/2[S^2_p\,(\alpha,\beta,\mu_n b)-T_{p-1}\,(\alpha,\beta,\mu_n b)\,T_{p+1}\,(\alpha,\beta,\mu_n b)] - a^2/2\,[S^2_p\,(\alpha,\beta,\mu_n a)-T_{p-1}\,(\alpha,\beta,\mu_n a)\,T_{p+1}\,(\alpha,\beta,\mu_n a)] \tag{2.7}$$

द्वारा व्यक्त करते हैं जहाँ

$$T_{p\pm1}\,(\alpha,\beta,\mu_n r)=J_{p\pm1}\,(\mu_n r)\,[Y_p(\alpha,\mu_n a)+Y_p(\beta,\mu_n b)] - Y_{p\pm1}\,(\mu_n r)\,[J_p(\alpha,\mu_n a)+J_p(\beta,\mu_n b) \tag{2.8}$$

(2.1) का संक्रियात्मक गुण है :

$$\int_a^b r\left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{p^2}{r^2}f\right) S_p(\alpha, \beta, \mu_n r)\, dr$$
$$=b/\beta_2 S_p(\alpha, \beta, \mu_n b)\,[\beta_1 f+\beta_2\, df/dr]_{r=b}-a/\alpha_2$$
$$S_p(\alpha, \beta, \mu_n a)\,[\alpha_1 f+\alpha_2\, df/dr]_{r=a}-\mu_n^2 \bar{f}(n) \tag{2.9}$$

फलन $F(z)$ का सान्त ज्या परिवर्त निम्न प्रकार से परिभाषित होता है

$$F(m)=\int_0^h F(z)\sin\frac{m\pi z}{h}\, dz, \tag{2.10}$$

जहाँ $\bar{F}(z)$ को

$$F(z)=2/h \sum_{m=1} F(m)\sin\frac{m\pi z}{h} \tag{2.11}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है। इसका संक्रियात्मक गुण है :

$$\int_0^h \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\sin\frac{m\pi z}{h}\, dz=\frac{m\pi}{h}\,[(-1)^{m+1}\, F(h)+F(0)]-\frac{m^2\pi^2}{h^2}\bar{F}(m) \tag{2.12}$$

फलन $V_1(t)$ के लैप्लास परिवर्त को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है।

$$V_1(s)=\int_0^\infty e^{-st}\, V_1(t)\, dt \tag{2.13}$$

अर्थात्

$$V_1(s)\doteqdot V_1(t)$$

[1, p. 36] में दी गई लैप्लास परिवर्त संकलन प्रमेय

$$\int_v^t V_1(t-Y)\, V_2(Y)\, dY \doteqdot V_1(s)\, V_2(s), \tag{2.14}$$

है बशर्ते कि $V_1(t)$ तथा $V_2(t)$ खंडशः प्रत्येक अन्तराल $0\leqslant t\leqslant T$ में और कोटि e^{wt} ज्यों ज्यों t अनन्त के निकट आता है और $s>w$ संतत हैं।

3. ऊष्मा जनन एवं विकिरण वाले बेलनाकार कोश में ऊष्मा संचलन के काल उत्क्रमण का निर्मेय

हम एक बेलनाकार कोश में ऊष्मा विसरण पर विचार करेंगे जिसकी अक्षि Z-अक्षि से संगामी है और $0\leqslant z\leqslant h$ $a\leqslant r\leqslant b$ द्वारा परिभाषित है जहाँ a तथा b क्रमशः आन्तरिक तथा वाह्य अर्धव्यास हैं एवं (r, θ, z) बेलनाकार ध्रुवीय निर्देशांक हैं जिनकी संमिति Z अक्ष के अनुसार है और ऊष्मा के स्रोत

उसी के भीतर हैं। ऊष्मा जनन की दर को ताप का फलन $\mu(r, z, t)$ मान लिया गया है। बेलन में किसी भी बिन्दु में जिसकी संमिति Z अक्ष के प्रति है, ताप $\mu(r, z, t)$ निम्नलिखित अवकल समीकरण का हल है।

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial u^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+H(r, z, t, u) \tag{3.1}$$

जहाँ $H(r, z, t, u)$ ऊष्मा स्रोत फलन है और k विसरणशीलता स्थिरांक है जिसके भौतिक प्रतिबन्ध

$$[k_1 u(r, z, t)+k_2\frac{\partial}{\partial r}u(r, z, t)]_{r=a}=F_a(z, t),\ 0<z<h,\ t>0) \tag{3.2}$$

$$[k_3 u(r, z, t)+k_4\frac{\partial}{\partial r}u(r, z, t)]_{r=b}=F_b(z, t),\ 0<z<h,\ t>0 \tag{3.3}$$

है जहाँ k_1, k_2, k_3 तथा k_4 विकिरण स्थिरांक हैं

$$u(r, z, t)\,|_{z=h}=f_1(r, t)\ a<r<b,\ t>0 \tag{3.4}$$

$$u(r, z, t)\,|_{z=h}=f_2(r, t)\ a<r<b,\ t>0 \tag{3.5}$$

$$u(r, z, t)\,|_{t=0}=w(r, z)\ (\text{अज्ञात})\ a<r<b,\ 0<z<h \tag{3.6}$$

$$u(r, z, t)\,|_{t=T}=v(r, z)\ (\text{ज्ञात})\ a<r<b,\ 0<z<h \tag{3.7}$$

प्रतिस्थापन करने पर [6, p. 194]

$$H(r, z, t, u)=\phi(r, z, t)+\in(t)\,u(r, z, t), \tag{3.8}$$

$$V(r, z, t)=u(r, z, t)\exp\left[-\int_0^t \in(Y)\,dy\right], \tag{3.9}$$

$$X(r, z, t)=\phi(r, z, t)\ \exp\left[-\int_0^t \in(Y)\,dY\right], \tag{3.10}$$

अवकल समीकरण (3.1) निम्न में समानीत हो जाता है :

$$\frac{\partial V}{\partial t}=k\left[\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right]+X(r, z, t) \tag{3.11}$$

निर्मेय का हल

चर z के लिये समीकरण (3.11) में (2.10) को सम्प्रयुक्त करने एवं (3.4), (3.5) तथा (2.12) का उपयोग करने पर हमें

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{V}(r, m, t)=k\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2\pi^2}{h^2}\right]\overline{V}(r, m, t)$$
$$+\frac{km\pi}{h}\left[(-1)^{m+1}f_2(r, t)+f_1(r_1, t)\right]+\overline{X}(r.\, m, t) \tag{3.12}$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$\overline{X}(r, m, t)=\int_0^h X(r, z, t) \sin \frac{m\pi z}{h} dz \tag{3.13}$$

अब

$$a_1=k_1, \ a_2=k_2 \ \beta_1=k_3, \ \beta_2=k_4, \ p=0$$

मानने तथा समीकरण (3.12) में (2.1) को सम्प्रयुक्त करने और (3.2), (3.3) तथा (2.9) का उपयोग करने पर हमें

$$\frac{d}{dt} \mathbf{V}(\mu_n, m, t)+\lambda \mathbf{V}(\mu_n, m, t)=\frac{km\pi}{h} [(-1)^{m+1} \bar{f}_2(\mu_n, t)$$

$$+\bar{f}_1(\mu_n, t)]+\frac{kb}{\beta_2} S_0(\alpha, \beta, \mu_n b)\overline{F}_b(m, t)-\frac{ka}{\alpha_2} S_0(\alpha, \beta, \mu_n a)$$

$$\times \overline{F}_a(m, t)+\mathbf{X}(\mu_n, m, t), \tag{3.14}$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$\lambda=k\left(\mu_n^2+\frac{m^2\pi^2}{h^2}\right),$$

$$\left.\begin{matrix}\bar{f}_1(\mu_n, t)\\ \bar{f}_2(\mu_n, t)\end{matrix}\right| =\int_a^b \left|\begin{matrix} f_1(r, t) \\ f_2(r, t)\end{matrix}\right| S_0(\alpha, \beta, \mu_n r)\, dr. \tag{3.15}$$

$$\left.\begin{matrix}\overline{F}_a(m, t)\\ \overline{F}_b(m, t)\end{matrix}\right| =\int_0^h \left|\begin{matrix} F_a(z, t) \\ F_b(z, t)\end{matrix}\right| \sin \frac{m\pi z}{h}\, dz \tag{3.16}$$

तथा

$$\mathbf{X}(\mu_n, m, t)=\int_a^b \int_0^h r\, X(r, z, t)\, S_0(\alpha, \beta, \mu_n r) \sin \frac{m\pi z}{h}\, dr\, dz \tag{3.17}$$

(2.13), (2.14) तथा (3.6) का उपयोग करते हुये (3.14) को $\mathbf{V}(\mu_n, m, t)$ के लिये हल करने पर

$$\mathbf{V}(\mu_n, m, t)=\mathbf{w}(\mu_n, m)e^{-\lambda t}+\int_0^t \left[\frac{km\pi}{h} [(-1)^{m+1} \bar{f}_2(\mu_n, Y)\right.$$

$$+\bar{f}_1(\mu_n, Y)]+kb/\beta_2\, S_0(\alpha, \beta, \mu_n b)\, \overline{F}_b(m, Y)-ka/\alpha_2$$

$$\left.\times S_0(\alpha, \beta, \mu_n a)\, \overline{F}_a(m, Y)+\mathbf{X}(\mu_n, m, Y)\right] e^{-(t-Y)}\, dY.$$

(3.7) एवं (3.9) का उपयोग करने तथा स्थान बदलने से हमें

$$\mathbf{w}(\mu_n, m)=\nu(\mu_n, m)e^{[\lambda T-\int_0^t \epsilon\, (Y)dY]}-\int_0^T \left[\frac{km\pi}{h} [(-1)^{m+1}\right.$$

$$\times \bar{f}_2(\mu_n, Y)+\bar{f}_1(\mu_n\ Y]+\frac{kb}{\beta_2} S_0(\alpha, \beta, \mu_n b)\ \bar{F}_b(m, Y)-ka/\alpha_2$$

$$\times S_0(\alpha, \beta, \mu_n a)\ \bar{F}_a(m, Y)+\mathbf{X}(\mu_n, m, Y)\Big] e^{\lambda T}\, dY \qquad (3.18)$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$\mathrm{v}(\mu_n, m)=\int_a^b \int_0^h r\ \mathrm{v}(r, z)\ S_0(\alpha, \beta, \mu_n r) \sin \frac{m\pi z}{h}\, dr\, dz \qquad (3.19)$$

समीकरण (3.18) में प्रतिलोमन प्रमेय (2.6) तथा (2.11) का सम्प्रयोग करने पर $w(r, z)$ निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$w(r, z)=2/h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n} \frac{1}{C_n} S_0(\alpha, \beta, \mu_n r) \sin \frac{m\pi z}{h}\Big[\mathrm{v}(\mu_n, m)\times$$

$$e^{[\lambda T-\int_0^T \epsilon(Y)\, dY]}\ -\int_0^t \Big[\frac{km\pi}{h}\ [(-1)^{m+1}\ \bar{f}_2(\mu_n, Y)$$

$$+\bar{f}_1(\mu_n, Y)[+kb/\beta_2\ S_0(\alpha, \beta, \mu_n b)\ \bar{F}_b(m, Y)-ka/\alpha_2$$

$$\times S_0(\alpha, \beta, \mu_n a)\ \bar{F}_a(m, Y)+\mathbf{X}(\mu_n, m, Y]\ e^{\lambda r}\ dY\Big], \qquad (3.20)$$

जहाँ समीकरण (2.3) के समस्त धन मूलों का संकलन किया जाता है और C_n को (2.7) समीकरण द्वारा $p=0$ सहित व्यक्त किया जाता है ।

विशिष्ट दशायें

(3.2) के सामान्य फल में

$$\in(t)=\in_0,\ \phi(r, z, t)=\frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r_0}\, ze^{ct},$$

$$a \leqslant r_0 \leqslant b$$

$$v=(r, z)=(1-z/h)\ r$$

तथा

$$F_a(z, t)=F_b(z, t)=f_1(r, t)=f_2(r, t)=0$$

प्रतिस्थापित करने पर $w(r, z)$ के लिये हल प्राप्त होता है जो निम्नवत् है

$$w(r, z)=\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n} (1/C_n)\ S_0(\alpha, \beta, \mu_n r) \sin \frac{m\pi z}{h}\Big[\frac{2}{\pi m \mu_n}$$

$$\times \exp[(\lambda-\in_0)T]\ [b\ T_1(\alpha, \beta, \mu_n b)-a\ T_1(\alpha, \beta, \mu_n a)]$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}}{(\lambda-\in_0-c)}\ \frac{k}{\pi}\ \ S_0(\alpha, \beta, \mu_n r_0)\Big[1-\exp\ [\lambda-(\in_0+c-\lambda)T]\Big]\Big],$$

जहाँ $T_1(\alpha, \beta, \mu_n a)$ और $T_1(\alpha, \beta, \mu_n b)$ (2.8) की सहायता से प्राप्त किये जाते हैं जिसमें क्रमशः तथा $p=0$ तथा $r=a$ तथा $r=b$ ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय डा० सी० बी० राठी के कृतज्ञ हैं, जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में अभिरुचि दिखाई ।

निर्देश

1. चर्चिल, आर० वी०, Operational Mathematics, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क** 1958
2. मार्ची, ई० तथा जग्राब्लिच, जी०, **एडिनबरा मैथ० सोसा०**, 1964, **14**, 159-164
3. वही, Czech. J. Physics, 1965, B **15**, 204-209.
4. मेहता, डी० के०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस०**, 1969, **39** (III)
5. साभरवाल, के० सी०, **इंडियन जर्न० प्योर एप्लाइड फिजि०**, 1965, 449-50
6. स्नेडान, आई० एन०, Fourier Transforms, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क** 1951

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 3, July, 1976, Pages 221-226

दो चरों वाले सार्वीकृत H-फलन का प्राचलों के प्रति समाकलन

पी० आनन्दानी तथा नाम प्रसाद सिंह
गणित विभाग, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—मार्च 3, 1976]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में दो चरों वाले H-फलन सम्बन्धी कतिपय समाकलों का मान ज्ञात किया गया है जहाँ समाकलन H-फलन के प्राचलों के प्रति सम्पन्न किया गया है।

Abstract

Integration of generalized H-Function of two variables with respect to the parameters. *By* P. Anandani and Nam Prasad Singh, Department of Mathematics, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal.

In this paper few integrals involving H-function of two variables have been evaluated, where the integration has been performed with respect to the parameters of the H-function. As H-function of two variables contains most of the functions of two variables viz. Appell functions, Kampe de Feriet function, generalizations of Meijer's G-function introduced by R. P. Agarwal and B.L. Sharma, so on specializing the parameters involved in the integrals, many new relations can be obtained as well as known integrals scattered over the literature can be deduced from our results.

1. भूमिका

वर्मा[1] ने फाक्स के H-फलन का दो चरों के लिये सार्वीकरण किया जिसे निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जावेगा :

$$H^{(m_1, m_2);\ (n_1, n_2),\ n_3}_{(p_1, p_2)\ p_3;\ (q_1, q_2),\ q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})];[(c_{p_2}, C_{p_2})];[(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})];[(d_{q_2}, D_{q_2})];[(f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \psi(s, t)\ \phi(s+t)\ y^s z^t\ ds\ dt, \tag{1·1}$$

जहाँ

$$\psi(s,t)=\frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(b_j-B_js)\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+A_js)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-D_jt)\prod_{j=2}^{n_2}\Gamma(1-c_j+C_jt)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+B_js)\prod_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-A_js)\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+D_jt)\prod_{j=n_2+1}^{p_2}(c_j-C_jt)}, \tag{1·2}$$

$$\phi(s+t)=\frac{\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+E_js+E_jt)}{\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j-E_js-E_jt)\prod_{j=1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+F_js+F_jt)} \tag{1·3}$$

तथा $[(a_p, A_p)]$ द्वारा प्राचलों के समुच्चय $(a_1, A_1), \ldots, (a_p, A_p)$ का बोध होता है।

(1·1) में समाकल पूर्णतः अभिसारी होता है यदि $|\arg y|<\frac{1}{2}\mu_1\pi$ तथा $|\arg z|<\frac{1}{2}\mu_2\pi$, जहाँ

$$\mu_1\equiv\left[\left(\sum_1^{n_1}A_j+\sum_1^{m_1}B_j+\sum_1^{n_3}E_j\right)-\left(\sum_{n_1+1}^{p_1}A_j+\sum_{m_1+1}^{q_1}B_j+\sum_{n_3+1}^{p_3}E_j+\sum_1^{q_3}F_j\right)\right] \tag{1·4}$$

तथा

$$\mu_2\equiv\left[\left(\sum_1^{n_2}C_j+\sum_1^{m_2}D_j+\sum_1^{n_3}E_j\right)-\left(\sum_{n_2+1}^{p_2}C_j+\sum_{m_2+1}^{q_2}D_j+\sum_{n_3+1}^{p_3}E_j+\sum_1^{q_3}F_j\right)\right]. \tag{1·5}$$

आगे सर्वत्र संक्षेपण की दृष्टि से $[P_1], [P_2], [P_3], [Q_1], [Q_2], [Q_3]$ द्वारा क्रमशः $[(a_{p_1}, A_{p_1})]$, $[(c_{p_2}, C_{p_2})]$, $[(e_{p_3}, E_{p_3})]$, $[(b_{q_1}, B_{q_1})]$, $[(d_{q_2}, D_{q_2})]$, $[(f_{q_3}, F_{q_3})]$ प्राचलों का एवं $\left(a+\begin{vmatrix}a_1\\a_2\end{vmatrix}, u\right)$ से प्राचल $(a+a_1, u)$, $(a+a_2, u)$ और $\left(a+\begin{vmatrix}a_1\\a_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}u_1\\u_2\end{vmatrix}\right)$ से $(a+a_1, u_1)$, $(a+a_2, u_2)$ को प्रदर्शित किया जावेगा।

निम्नलिखित ज्ञात फल [2, p. 300 (21)]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\Gamma(a+x)\Gamma(b-x)\Gamma(c+x)\Gamma(d-x)}=\frac{\Gamma(a+b+c+d-3)}{\Gamma(a+b-1)\Gamma(b+c-1)\Gamma(c+d-1)\Gamma(d+a-1)} \tag{1·6}$$

जहाँ $Re(a+b+c+d)>3$ का प्रायः ही इस प्रपत्र में उपयोग किया जावेगा।

2. जिन समाकलों का मान ज्ञात किया जाना है, वे हैं :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H^{(m_1, m_2);\,(n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3;\,(q_1+4, q_2), q_3}\left[\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[P_1];\,[P_2];\,[P_3]\\ [Q_1], \left(1-\begin{vmatrix}a\\c\end{vmatrix}-x, u\right), \left(1-\begin{vmatrix}b\\d\end{vmatrix}+x, \begin{vmatrix}u\\v\end{vmatrix}\right); [Q_2]; [Q_3]\end{matrix}\right]dx$$

$$=H^{(m_1, m_2); (n_1+1, n_2), n_3}_{(p_1+1, p_2), p_3; (q_1+4, q_2), q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (4-a-b-c-d, 3u+v), [P_1]; [P_2]; [P_3] \\ [Q_1], \left(2-\begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix}-b, 2u\right), \left(2-\begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix}-d, u+v\right); [Q_2]; [Q_3] \end{matrix}\right] \tag{2·1}$$

बशर्ते कि $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $(\mu_1-3u-v)>0$, $\mu_2>0$, $|\arg y|<\frac{1}{2}(\mu_1-3u-v)\pi$, $|\arg z|<\frac{1}{2}\mu_2\pi$, $Re[a+b+c+d+(3u+v)(b_i/B_i)]>3$ $(i=1, 2, \ldots, m_1)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3; (q_1+4, q_2), q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [P_1]; [P_2]; [P_3] \\ [Q_1]\left(1-\begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix}-x, \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix}\right), \left(1-\begin{vmatrix} b \\ d \end{vmatrix}+x, \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix}\right); [Q_2]; [Q_3] \end{matrix}\right] dx$$

$$=H^{(m_1, m_2); (n_1+1, n_2), n_3}_{(p_1+1, p_2), p_3; (q_1+4, q_2), q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (4-a-b-c-d, 2u+2v), [P_1]; [P_2]; [P_3] \\ [Q_1], \left(2-\begin{vmatrix} a+b \\ c+d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2u \\ 2v \end{vmatrix}\right), \left(2-\begin{vmatrix} b+c \\ d+a \end{vmatrix}, u+v\right)[Q_2]; [Q_3] \end{matrix}\right] \tag{2·2}$$

बशर्ते कि $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $(\mu_1-2u-2v)>0$, $\mu_2>0$, $|\arg y|<\frac{1}{2}(\mu_1-2u-2v)\pi$, $|\arg z|<\frac{1}{2}\mu_2\pi$, $Re[a+b+c+d+2(u+v)(b_i/B_i)]>3$ $(i=1, 2, \ldots, m_1)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3; (q_1, q_2+4), q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [P_1]; [P_2]; [P_3] \\ [Q_1]; [Q_2], \left(1-\begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix}-x, u\right), \left(1-\begin{vmatrix} b \\ d \end{vmatrix}+x, \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix}\right); [Q_3] \end{matrix}\right] dx$$

$$=H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2+1), n_3}_{(p_1, p_2+1), p_3; (q_1, q_2+4), q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [P_1]; (4-a-b-c-d, 2u+2v), [P_2], [P_3] \\ [Q_1]; [Q_2], \left(2-\begin{vmatrix} a+b \\ c+d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2u \\ 2v \end{vmatrix}\right), \left(2-\begin{vmatrix} b+c \\ d+a \end{vmatrix}, u+v\right); [Q_3] \end{matrix}\right] \tag{2·3}$$

बशर्ते कि $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $\mu_1>0$, $(\mu_2-2u-2v)>0$, $|\arg y|<\frac{1}{2}\mu_1\pi$, $|\arg z|<\frac{1}{2}\mu_2\pi$,

$Re[a+b+c+d+2(u+v)(d_k/D_k)]>3$ $(k=1, 2, \ldots, m_2)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3; (q_1, q_2), q_3+4}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [P_1]; [P_2]; [P_3] \\ [Q_1]; [Q_2], [Q_3], \left(1-\begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix}-x, u\right), \left(1-\begin{vmatrix} b \\ d \end{vmatrix}+x, v\right) \end{matrix}\right] dx$$

$$=H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3+1}_{(p_1, p_2), p_3+1; (q_1, q_2), q_3+4}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [P_1]; [P_2]; (4-a-b-c-d, 2u+2v), [P_3] \\ [Q_1]; [Q_2]; [Q_3], \left(2-b-\begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix}, u+v\right), \left(2-d-\begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix}, u+v\right) \end{matrix}\right] \tag{2·4}$$

बशर्ते कि $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $\mu_1-2(u+v)>0$, $\mu_2-2(u+v)>0$, $|\arg y|<\frac{1}{2}[\mu_1-2(u+v)]\pi$,

$|\arg z|<\frac{1}{2}[\mu_2-2(u+v)]\pi$, $Re(a+b+c+d)>3$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3; (q_1+2, q_2+2), q_3} \left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [P_1]; [P_2]; [P_3] \\ Q_1], \left(1-\left|\begin{matrix} a+x \\ d-x \end{matrix}\right|, \left|\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right|\right); [Q_2], \left(1-\left|\begin{matrix} b-x \\ c+x \end{matrix}\right|, \left|\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right|\right); [Q_3] \end{matrix} \right] dx$$

$$= H^{(m_1, m_2); (q_1, n_2), n_3+1}_{(p_1, p_2), p_3+1; (q_1+1, q_2+1), q_3+2}$$

$$\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [P_1]; [P_2]; (4-a-b-c-d, u+v), [P_3]; \\ [Q_1], (2-d-a, u+v); [Q_2], (2-b-c, u+v); [Q_3], \left(2-\left|\begin{matrix} a+b \\ c+d \end{matrix}\right|, \left|\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right|\right) \end{matrix} \right] \quad (2\cdot5)$$

बशर्ते कि $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $\mu_1 - u - v > 0$, $\mu_2 - u - v > 0$, $|\arg y| < \frac{1}{2}(\mu_1 - u - v)\pi$, $|\arg z| < \frac{1}{2}(\mu_2 - u - v)\pi$, $Re[a+b+c+d+(u+v)(b_i/B_i)]\ 0$ $(i=1, 2, ..., m_1)$, $Re[a+b+c+d+(u+v)(d_k/D_k)]\ 0$ $(k=1, 2, ..., m_2)$.

उपपत्ति

(1·6) में a, b, c एवं d को $a+us$, $b+us$, $c+us$ तथा $d+vs$ द्वारा प्रतिस्थापित करने; दोनों ओर $\frac{1}{(2\pi i)^2} \psi(s, t)\, \phi(s+t)\, y^s z^t$ से गुणा करने तथा कंटूर L_1 और L_2 की दिशा में s तथा t के प्रति समाकलित करने पर; बाईं ओर समाकलन के क्रम को बदलने पर जो इस प्रक्रिया में निहित समाकलों के परम अभिसरण के कारण वैध है,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{\psi(s, t)\phi(s+t)\, y^s z^t\, ds\, dt}{\Gamma(a+us+x)\Gamma(b+us-x)\Gamma(c+us+x)\Gamma(d+vs-x)} \right] dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{\psi(s, t)\, \phi(s+t) \Gamma[a+b+c+d+(3u+v)s-3]\, y^s z^t\, ds\, dt}{\Gamma(a+b+2us-1)\Gamma(b+c+2us-1)\Gamma[c+d+(u+v)s-1]\Gamma[d+a+(u+v)s-1]}$$

अब दो चरों वाले H-फलन (1·1) की परिभाषा का सम्प्रयोग करने पर हमें फल (2·1) की प्राप्ति होती है।

इसी प्रकार (2·2), (2·3), (2·4) एवं (2·5) सम्बन्धों को $\{a, b, c, d\}$ के स्थान पर क्रमश: $\{a+us, b+us, c+vs, d+vs\}$; $\{a+ut, b+ut, c+vt, d+vt\}$; $\{a+u(s+t), b+v(s+t), c+u(s+t), d+v(s+t)\}$ तथा $\{a+us, b+ut, c+vt, d+vs\}$ रखकर स्थापित किया जा सकता है।

3. विशिष्ट दशायें

इस अनुभाग में कतिपय रोचक विशिष्ट दशाओं की विवेचना की जावेगी।

(i) (2·1) में $u=0$, रखने पर

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(a+x)\Gamma(b-x)\Gamma(c+x)} H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3; (q_1+1, q_2), q_3} \left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [P_1]; [P_2]; [P_3] \\ [Q_1], (1-d+x, v); [Q_2]; [Q_3] \end{matrix} \right] dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(a+b-1)\Gamma(b+c-1)}$$

$$\times H^{(m_1,\ m_2);\ (n_1+1,\ n_2),\ n_3}_{(p_1+1,\ p_2),\ p_3);\ (q_1+2,\ q_2),\ q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle|\begin{matrix}(4-a-b-c-d,\ v);\ [P_1];\ [P_2]\ [P_3] \\ [Q_1],\left(2-d-\begin{vmatrix}a\\c\end{vmatrix},\ v\right);\ [Q_2]:\ [Q_3]\end{matrix}\right] \tag{3·1}$$

बशर्ते कि $v \geqslant 0$, $(\mu_1-v)>0$, $\mu_2>0$, $|\arg y|<\frac{1}{2}(\mu_1-v)\pi$, $|\arg z|<\frac{1}{2}\mu_2\pi$, $Re(a+b+c+d+vb_i/B_i)>3$ $(i=1, 2, ..., m_1)$.

(ii) (2·1) में $v=0$ रखने पर

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(d-x)}H^{(m_1,\ m_2);\ (n_1,\ n_2),\ n_3}_{(p_1,\ p_2),\ p_3;\ (q_1+3,\ q_2),\ q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle|\begin{matrix}[P_1];\ [P_2];\ [P_3] \\ [Q_1],\left(1-\begin{vmatrix}a\\c\end{vmatrix}-x,\ u\right)(1-b+x,\ u);\ [Q_2];\ [Q]\end{matrix}\right]dx$$

$$=H^{(m_1,\ m_2);\ (n_1+1,\ n_2),\ n_3}_{(p_1,+1,p_2),\ p_3;\ (q_1+4,\ q_2),\ q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle|\begin{matrix}(4-a-b-c-d,\ 3u),\ [P_1];\ [P_2];\ [P_3] \\ [Q_1],\left(2-b-\begin{vmatrix}a\\c\end{vmatrix},\ 2u\right),\left(2-d-\begin{vmatrix}a\\c\end{vmatrix},\ u\right);\ [Q_2];\ [Q_3]\end{matrix}\right] \tag{3·2}$$

बशर्ते कि $u \geqslant 0$, $\mu_1>3u$, $\mu_2>0$, $|\arg y|<\frac{1}{2}(\mu_1-3u)\pi$, $|\arg z|<\frac{1}{2}\mu_2\pi$, $Re(a+b+c+d+3ub_i/B_i)>3$ $(i=1, 2, ..., m_1)$.

(iii) (2·2) में $u=0$ रखने पर

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(a+x)\Gamma(b-x)}H^{(m_1,\ m_2);\ (n_1,\ n_2),\ n_3}_{(p_1,p_2),\ p_3;\ (q_1+3,\ q_2),\ q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle|\begin{matrix}[P_1];\ [P_2];\ [P_3] \\ [Q_1],\left(1-\begin{vmatrix}c+x\\d-x\end{vmatrix},\ v\right)[Q_2];\ [Q_3]\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(a+b-1)}$$

$$\times H^{(m_1,\ m_2);\ (n_1,\ n_2),\ n_3}_{(p_1+1,\ p_2),\ p_3;\ (q_1+3,q_2),\ q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle|\begin{matrix}(4-a-b-c-d,\ 2v,\ [P_1];\ [P_2];\ [P_3] \\ [Q_1],\left(2-\begin{vmatrix}b+c\\d+a\end{vmatrix},\ v\right),\ (2-c-d,\ 2v);[Q_2];\ [Q_3]\end{matrix}\right] \tag{3·3}$$

बशर्ते कि $v \geqslant 0$, $\mu_1>2v$, $\mu_2>0$, $|\arg y|<\frac{1}{2}(\mu_1-2v)\pi$, $|\arg z|<\frac{1}{2}\mu_2\pi$, $Re(a+b+c+d+2vb_i/B_i)>3$ $(i=1, 2, ..., m_1)$.

(iv) (2·4) में $u=0$ रखने पर

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(a+x)\Gamma(c+x)}H^{(m_1,\ m_2);\ (n_1,\ n_2),\ n_3}_{(p_1,\ p_2),\ p_3;\ (q_1,\ q_2),q_3+2}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle|\begin{matrix}[P_1];\ [P_2];\ [P_3] \\ [Q_1]:\ [Q_2];\ [Q_3],\left(1-\begin{vmatrix}b\\d\end{vmatrix}+x,\ v\right)\end{matrix}\right]dx$$

$$=H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3+1}_{(p_1, p_2), p_3+1; (q_1, q_2), q_3+4}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [P_1]; [P_2]; (4-a-b-c-d, [P_3] \\ [Q_1]; [Q_2]; [Q_3], \left(2-b-\left|\begin{matrix}a\\c\end{matrix}\right|, 2v\right), \left(2-d-\left|\begin{matrix}a\\c\end{matrix}\right|, 2v\right) \end{matrix}\right] \quad (3{\cdot}4)$$

बशर्ते कि $v \geqslant 0$, $\mu_1 > 2v$, $\mu_2 > 2v$, $|\arg y| < \frac{1}{2}(\mu_1 - 2v)\pi$, $|\arg z| < \frac{1}{2}(\mu_2 - 2v)\pi$, $Re(a+b+c+d) > 3$.

(v) (2·5) में $u=0$ रखने पर

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(a+x)\Gamma(b-x)}$$

$$\times H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3; (q_1+1, q_2+1), q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [P_1]; [P_2]: [P_3] \\ [Q_1], (1-d+x, v); [Q_2], (1-c-x, v); [Q_3] \end{matrix}\right] dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a+b-1)} H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3+1}_{(p_1, p_2), p_3+1; (q_1+1, q_2+1), q_3+1}$$

$$\times \left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [P_1]; [P_2]; (4-a-b-c-d, v)[P_3] \\ [Q_1], (2-d-a, v); [Q_2], (2-b-c, v); [Q_3], (2-c-d, v) \end{matrix}\right] \quad (3{\cdot}5)$$

बशर्ते कि $v \geqslant 0$, $\mu_1 > v$, $\mu_3 > v$, $|\arg y| < \frac{1}{2}(\mu_1 - v)\pi$, $|\arg z| < \frac{1}{2}(\mu_2 - v)\pi$, $Re(a+b+c+d+vb_i/B_i) > 0$ $(i=1, 2, \ldots, m_1)$, $Re(a+b+c+d+vd_k/D_k) > 0$ $(k=1, 2, \ldots, m_2)$.

निर्देश

1. वर्मा, आर० यू०, An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi.i Sec,t. I a Mat. (N. S.), 1971, **17**, 103-110.

2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि : Tables of Integral Transforms, भाग II, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1954, 300.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 3, July 1976, Pages 227-231

सार्वीकृत H-फलन वाले कतिपय गुणनफलों का समाकलन

बी० एल० माथुर
सुरक्षा प्रयोगशाला, जोधपुर (राजस्थान)

[प्राप्त—दिसम्बर 16, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य दो चरों वाले कतिपय समाकलों का मान ज्ञात करना है। कुछ विशिष्ट दशाओं की भी विवेचना की गई है।

Abstract

Integration of certain products involving a generalized H-function. *By* B. L. Mathur, Defence Laboratory, Jodhpur-342001.

The object of the present paper is to evaluate certain integral involving *H*-function of two variables. Some particular cases have also been discussed.

1. विषय प्रवेश

हाल ही में मनोट तथा कल्ला[5] ने दो चरों वाले *H*-फलन को द्विगुण मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल के द्वारा परिभाषित किया है जिसे संशोधित संकेतन द्वारा निम्नवत् व्यक्त किया जा सकता है :

$$H[x, y]=H^{L,\, N,\, N_1,\, M,\, M_1}_{G,\, (P:\, P_1),\, J,\, (Q:\, Q_1)}\left[\begin{array}{c|c} u & (e, E) \\ & (a, A); (c, C) \\ & (f, F) \\ v & (b, B); (d, D) \end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int_{-i\infty}^{i\infty} E(s+t)\, \theta(s, t)\, x^s y^t\, ds\, dt \tag{1.1}$$

जहाँ रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया जाता है। यहाँ

$$\theta(s, t)=\frac{\prod_{1}^{M} \Gamma(b_j-sB_j) \prod_{1}^{N} \Gamma(1-a_j+sA_j)}{\prod_{M+1}^{Q} \Gamma(1-b_j+sB_j) \prod_{N+1}^{P} \Gamma(a_j-sA_j)}$$

$$\times \frac{\prod_{1}^{M_1} \Gamma(d_j-tD_j) \prod_{1}^{N_1} \Gamma(1-c_j+tC_j)}{\prod_{M_1+1}^{Q_1} \Gamma(1-d_j+tD_j) \prod_{N_1+1}^{P_1} \Gamma(c_j-tC_j)},$$

$$F(s+t)=\frac{\prod_{1}^{L} \Gamma[e_j+(s+t)E_j]}{\prod_{L+1}^{G} \Gamma[1-e_j-(s+t)E_j] \prod_{1}^{J} \Gamma[f_j+(s+t)F_j]}.$$

$L, M, N, P, Q, J, G, M_1, N_1, P_1, Q_1$ ऐसी अनृण संख्यायें हैं कि $0 \leqslant L \leqslant G$, $0 \leqslant N \leqslant P$, $1 \leqslant M \leqslant Q$, $0 \leqslant N_1 \leqslant P_1$, $1 \leqslant M_1 \leqslant Q_1$. समस्त $a, b \ldots f$ वास्तविक हैं और समस्त $A, B, \ldots F$ वास्तविक तथा घनात्मक हैं, (A_p) प्राचलों का अनुक्रम ऐसा है कि समाकल्य के एक भी पोल सम्पाती नहीं होते।

आगे (a, A) का प्रयोग P कोटि के युग्मों $(a_1, A_1), \ldots, (a_p, A_p)$ के लिये किया जावेगा।

संकेत $\triangle(k, a)$ से K प्राचलों के समुच्चय $\frac{a}{k}, \frac{a+1}{k}, \ldots, \frac{a+k-1}{k}$ का बोध होगा।

गुणनफल $\Gamma(a+b)\,\Gamma(a-b)$ को $\Gamma(a \pm b)$ के रूप में लिखा जावेगा। फलन (1·1) को $H[x, y]$ द्वारा प्रदर्शित किया जावेगा और इससे सम्बद्ध फलन को, जो $H[x, y]$ की दशा $L=0$ के संगत है, $H_1[x, y]$ द्वारा संक्षिप्तीकृत किया जावेगा।

2. समाकलों का मूल्यांकन

पहला समाकल, जिसका मान ज्ञात करना है वह है:

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} (1+x)^{-1/2}\, T^{2\mu}\, L_1[ux^m T^{2n}, vx^m T^{2n}]\, dx$$
$$=\Gamma(\delta+\mu+\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2}-\lambda-\mu) m^{2\lambda-1/2}(m+n)^{-(\lambda+\mu)}\, \pi^{-1/2}\, (m-n)^{\mu-\lambda}$$
$$\times H^{2m, N, N_1, M, M_1}_{G+2m, (P: P_1), J+2m, (Q: Q_1)} \left[\begin{array}{c|l} \delta u & \triangle(2m, 2\lambda), (e, E) \\ & (a, A); (c, C) \\ & (f, F), \triangle(m+n, \lambda+\tfrac{1}{2}+\mu), \\ \delta v & \triangle(m-n, \lambda+\tfrac{1}{2}-\mu) \\ & (b, B); (d, D) \end{array} \right] \quad (2\cdot1)$$

जहाँ m तथा n घनपूर्ण संख्यायें हैं और $m>n$

$$Re\left[\lambda+m\left(\frac{b_j}{B_j}+\frac{d_i}{D_i}\right)\right]>0 \quad \text{यदि} \quad j=1, 2, \ldots, M \text{ तथा } i=1, 2, \ldots, M_1,$$

$$Re\left[\lambda+\mu-\tfrac{1}{2}+(m+n)\left\{\frac{a_i-1}{A_i}+\frac{c_j-1}{C_j}\right\}\right]<0 \text{ यदि } i=1, 2, \ldots, N \text{ तथा } j=1, 2, \ldots, N_1,$$

$$\sum_1^G E_j+\sum_1^P A_j-\sum_1^Q B_j-\sum_1^J E_j\leqslant 0, \; \sum_1^G E_j+\sum_1^{P_1} C_j-\sum_1^J F_j-\sum_1^{Q_1} D_j\leqslant 0,$$

$$|\arg u|<\frac{\pi}{2}\left[\sum_1^M B_j-\sum_{M+1}^Q B_j+\sum_1^N A_j-\sum_{N+1}^P A_j-\sum_1^G E_j-\sum_1^J F_j\right],$$

$$|\arg v|<\frac{\pi}{2}\left[\sum_1^{M_1} D_j-\sum_{M_1+1}^{Q_1} D_j+\sum_1^{N_1} C_j-\sum_{N_1+1}^{P_1} C_j-\sum_1^G E_j-\sum_1^J F_j\right],$$

$$T=x^{1/2}+(1+x)^{1/2}, \; \delta=m^{2m}(-1)^{m+n}[(m+n)^{m+n}(m-n)^{m-n}]^{-1}.$$

उपपत्ति :

(2·1) के समाकल्य में *H*-फलन के स्थान पर इसका मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल (1·1) रखेंगे फिर हम समाकलन के क्रम को बदलेंगे जो (2·1) में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है। तब परिणाम[3] की सहायता से आन्तरिक समाकल का मान ज्ञात करेंगे

$$\int_0^\infty x^{a-1}(1+x)^{-1/2}\, T^{2b}\, dx=\Gamma(2a)\Gamma(\tfrac{1}{2}-a-b)\, 2^{1-2a}[\Gamma(\tfrac{1}{2}+a-b)]^{-1}$$

तथा गास और लेगेंड्र[2] के गुणन सूत्र का उपयोग करने पर

$$\Gamma(mz)=(2\pi)^{1/2(1-m)}\, m^{mz-1/2}\prod_{i=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{i}{m}\right)$$

अन्त में (1·1) की सहायता से फलों की विवेचना करने पर हमें वांछित फल मिलता है।

द्वितीय समाकल

इसी प्रकार से अग्रसर होने पर पाया गया कि यदि m तथा n ऐसी घन पूर्ण संख्यायें हैं कि $m<n$ तो (2·1) में दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत हमें

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}(1+x)^{-1/2}\, T^{2\mu}\, H_1[ux^m T^{2n}, vx^m T^{2n}]dx$$

$$=2\;\pi)^{1/2}\quad {}^{2\lambda-1/2}(n-m)^{\mu-\lambda}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}\pm\lambda\pm\mu)(m+n)^{-(\lambda+\mu)}\{\Gamma(\lambda-\mu+\tfrac{1}{2})\Gamma(\mu-\lambda+\tfrac{1}{2})\}^{-1}$$

$$\times H^{m+n,\ N,\ N_1,\ M,\ M_1}_{G+m+n,\ (P:P_1),\ J+m+n,\ (Q:Q_1)}\left[\begin{matrix} u\delta' \\ \\ \\ v\delta' \end{matrix}\left|\begin{matrix} \triangle(2m, 2\lambda).\ \triangle(n-m, \mu-\lambda+\frac{1}{2}), (e,E) \\ (a, A); (c, C) \\ (f, F),\ \triangle(m+n, \lambda+\mu+\frac{1}{2}) \\ (b, B); (d, D) \end{matrix}\right.\right] \quad (2\cdot2)$$

प्राप्त होता है जहाँ $\delta' = m^{2m}(n-m)^{n-m}(m+n)^{-(m+n)}$.

तृतीय समाकल

यदि $m=n$, तो हमें निम्नांकित फल मिलता है :

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}(1+x)^{-1/2}\ T^{2\mu}\ H_1[ux^n\ T^{2n},\ vx^n\ T^{2n}]\ dx$$

$$=2^{1-2\lambda}(2n)^{\lambda-1/2-u}\ \Gamma(\lambda+\mu+\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2}-\lambda-\mu)[\Gamma(\tfrac{1}{2}+\lambda-\mu)]^{-1}$$

$$\times H^{2n,\ N,\ N_1,\ M,\ M_1}_{G+2n,\ (P:P_1),\ J+2n,(Q:Q_1)}\left[\begin{matrix} n(2^{-2n}) \\ \\ \\ v(2^{-2n}) \end{matrix}\left|\begin{matrix} \triangle(2n, 2\lambda), (e, E) \\ (a, A); (c, C) \\ (f, F),\ \triangle(2n, \frac{1}{2}+\lambda+\mu) \\ (b, B); (d, D) \end{matrix}\right.\right] \quad (2\cdot3)$$

3. विशिष्ट दशायें

(2·1) में $J=G=0$ तक सीमित करने पर हमें अनन्त समाकल प्राप्त होता है जिसमें फाक्स[4] के दो H-फलनों का गुणनफल होता है।

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}\ (1+x)^{-1/2}\ T^{2\mu}\ H[ux^m\ T^{2n}]H[vx^m\ T^{2n}]\ dx$$

$$=m^{2\lambda-1/2}\ \Gamma[\tfrac{1}{2}\pm(\lambda+u)]\ \pi^{-1/2}(m+n)^{-(\lambda+\mu)}(m-n)^{\mu-\lambda}$$

$$\times H^{2m,\ N,\ N_1,\ M,\ M_1,}_{2m,\ (P:\ P_1),\ 2m,\ (Q:Q_1)}\left[\begin{matrix} u\delta \\ \\ \\ v\delta \end{matrix}\left|\begin{matrix} \triangle(2m, 2\lambda) \\ (a, A); (c, C) \\ \triangle(m+n, \lambda+\mu+\frac{1}{2}), \triangle(m-n, \lambda-\mu+\frac{1}{2}) \\ (b, B); (d, D) \end{matrix}\right.\right] (3.1)$$

जो (2·1) में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

यदि हम (2·1) के समस्त $A=B=\ldots=F=1$ रख दें तो हमें सिंघल[6] का ज्ञात फल प्राप्त होगा।

किन्तु यदि हम (2·1) में $G=J=P_1=Q_1=M_1=N_1=0$ रखें और सीमा $\nu \to 0$ लें तो हमें फाक्स के H-फलन वाला समाकल

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}(1+x)^{-1/2}\, T^{2\mu}\, H_{P,\,Q}^{M,\,N}\left[ux^m\, T^{2n}\,\middle|\,\begin{matrix}(a, A)\\(b, B)\end{matrix}\right]dx$$

$$=m^{2\lambda-1/2}\,\Gamma[\tfrac{1}{2}\pm(\lambda+\mu)]\,\pi^{-1/2}(m+n)^{-(\lambda+\mu)}(m-n)^{\mu-\lambda}$$

$$\times H_{P+2m,\,Q+2m}^{M,\,N+2m}\left[u\delta\,\middle|\,\begin{matrix}\triangle(2m,\,1-2\lambda),(a,\,A)\\(b,\,B);\ \triangle(m+n,\,\tfrac{1}{2}-\lambda-\mu),\\\triangle(m-n,\,\tfrac{1}{2}+\mu-\lambda)\end{matrix}\right] \tag{3·2}$$

प्राप्त होगा जहाँ $Re\left[\lambda+\mu-\tfrac{1}{2}+(m+n)\left(\dfrac{a_i-1}{A_i}\right)\right]<0$ यदि $i=1, 2, \ldots, N, m>n,$

$Re\left[\lambda+m\,\dfrac{b_j}{B_j}\right]>0$ यदि $j=1, 2, \ldots, M,$

$|\arg u|<\dfrac{\pi}{2}\left[\sum_1^M B_j-\sum_{M+1}^Q B_j+\sum_1^N A_j-\sum_{N+1}^P A_j\right]$

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस इंडिया**, 1965, 3
2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Transcendental Functions, भाग I, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1953.
3. वही, Tables of Integral Transforms, भाग I, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1254.
4. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98.**
5. मुनोट, पी० सी० तथा कल्ला, एस० एल०, University Nac. de Tucumán, Rev. Ser. A, **1971, 21.**
6. सिंघल, जे० जी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस इंडिया**, 1966, **36.**

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 3, July 1976, Pages 233-236

जलकुम्भी तथा बोनमील निर्मित कम्पोस्ट का भिंडी की उपज एवं रासायनिक गुणों पर प्रभाव

अमर नाथ वर्मा तथा मुरारी मोहन वर्मा
शीलाधर मृत्तिका विज्ञान गवेषणागार, प्रयाग विश्वविद्यालय

[प्राप्त--अगस्त 29, 1974]

सारांश

भिंडी उत्पादन में जलकुम्भी का प्रयोग कार्बनिक खाद की तरह किया गया। कम्पोस्ट बनाते समय कैल्सियम फास्फेट 'बोनमील' के रूप में जलकुम्भी अपतृणों के साथ मिलाया गया। उपर्युक्त कम्पोस्ट के प्रयोग से भिंडी के उत्पादन तथा प्रोटीन और विटामिनों की मात्राओं में वृद्धि हुई। जलकुम्भी तालाबों में अपतृण की भाँति समस्या बनी हुई है जिसका उपयोग कार्बनिक खाद के लिए सुगमता से किया जा सकता है।

Abstract

Effect of water hyacinth and compost prepared from bone meal on the yield and chemical constituents of Bhindi. *By* A. N. Verma and M. M. Verma, Sheila Dhar Institute of Soil Sciences, Allahabad University.

Water hyacinth (Eichhornia crassipes Solmn.) could be utilised as organic manure for producing higher yield with better quality in turn of rich in protein, minerals and vitamin contents of Bhindi along with calcium phosphate. It is abundant, available throughout the country and has become a problem.

जलकुम्भी उष्णकटिबंधी जलवायु में तालाबों में अपतृण के रूप में उपलब्ध है जिसका उपयोग कार्बनिक खाद के लिए किया जा सकता है। जलकुम्भी में कार्बन, नाइट्रोजन, फास्फोरस, कैल्सियम तथा पोटैशियम पाये जाते हैं[1]। भूमि में ह्यूमस की मात्रा वृद्धि में यह कार्बनिक खाद अत्यन्त सहायक है क्योंकि कार्बनिक द्रव्यों का भूमि की उर्वरता से पारस्परिक धनात्मक सम्बन्ध होता है। पौधों के आवश्यक तत्वों की पूर्ति के साथ-साथ भूमि के जीवाणुओं द्वारा अन्य क्रियाओं में भी यह कार्बनिक खाद सक्रिय रहती है।

सारणी 2

भिंडी की पैदावार तथा रासायनिक संरचना (प्रति 100 ग्राम खाद्य भागों में)

क्रम संख्या	उपचार	उत्पादन/हेक्टर (क्विटल)	प्रोटीन (ग्राम)	P_2O_5 (मि०ग्रा०)	K_2O (मि०ग्रा०)	CaO (मि०ग्रा०)	MgO (मि०ग्रा०)	विटामिन		
								ए (आई० यू०)	बी$_1$ (मि०ग्रा०)	सी (मि०ग्रा०)
1.	नियंत्रण	48·6	1·89	55·1	105·5	67·0	44 0	86	0·072	13·8
2.	जलकुम्भी	98·0	2·08	63·6	126·7	72·6	53·3	100	0·083	19·0
3.	बोनमील	80·0	1·98	64·8	109·2	73·8	47·7	90	0·078	14·9
4.	जलकुम्भी तथा बोनमील	120·0	2·28	71·6	127·2	78·2	54·2	103	0·088	19·6

क्रिटिकल डिफ्रेन्स मान (5% सक्रियता पर)=3·672.

उक्त आशय को ध्यान में रखते हुये जलकुम्भी कम्पोस्ट का प्रयोग भिंडी की उपज एवं रासायनिक गुणों के परीक्षण के उद्देश्य से किया गया।

प्रयोगात्मक

यह प्रयोग विभिन्न प्लाटों में 'रैण्डमाईज्ड ब्लाक' पद्धति पर 1970-71 में भिंडी की 'पूसा सावनी' किस्म पर किया गया। प्लाटों में 25 टन प्रति हेक्टर की दर से जलकुम्भी तौल कर भूमि में बुआई के लगभग डेढ़ माह पूर्व फावड़े द्वारा खोदकर 0-9" की तह में मिला दी गयी। कुछ प्लाटों में 75 किलोग्राम प्रति हेक्टर की दर से बोनमील भी मिलाया गया। भिंडी फलियों की पैदावार क्विंटल प्रति हेक्टर के रूप में दर्शायी गयी है। भिंडी का रासायनिक विश्लेषण A. O. A. C. (एसोशियेसन ग्राफ आफिसियल एग्रिकल्चरल केमिस्ट्स)द्वारा किया गया है[9]।

सारणी 1

प्रायोगिक मिट्टी तथा जलकुम्भी का विश्लेषण

%	मिट्टी	जलकुम्भी
CaO	0·89	2·73
MgO	0·69	1·12
K_2O	0·89	5·02
P	0·10	0·68
C	0·57	36·41
N	0·05	2·29

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 2 में दिये गये भिंडी के उत्पादन के परिणामों से स्पष्ट है कि भिंडी की उत्पादन मात्रा उन प्लाटों में अधिक है जिनमें बोनमील तथा जलकुम्भी का प्रयोग किया गया है। बोनमील के साथ जलकुम्भी का प्रयोग भिंडी उत्पादन पर बोनमील तथा जलकुम्भी के अलग-अलग प्रभावों के योगफल से भी अधिक सिद्ध हुआ है। जलकुम्भी जब बोनमील के साथ मिट्टी में मिलाई जाती है, तब वह सम्भवतः बोनमील की उपस्थिति में अनेक क्रियाओं द्वारा प्राप्य पोषक तत्वों की मात्रा में वृद्धि करती है। इस प्रकार इन पोषक तत्वों की उपलब्धि के कारण भिंडी उत्पादन में सहायता मिलती है। सारणी 2 में दिये गये उत्पादन आँकड़े, सांख्यिकी विश्लेषण के पश्चत् सार्थक पाये गये जिससे जलकुम्भी तथा बोनमील के प्रभावों के भिंडी उत्पादन पर धनात्मक सहसम्बन्ध की पुष्टि होती है।

सारणी 2 के रासायनिक परिणामों से स्पष्ट है कि भिंडी की रासायनिक संरचना पर भी जलकुम्भी तथा बोनमील का प्रभाव पड़ा है। कार्बनिक खाद (जलकुम्भी तथा बोनमील) द्वारा भिंडी की प्रोटीन मात्रा, फास्फोरस, पोटाश, कैल्सियम, मैग्नीशियम तथा विटामिनों में ए, बी$_1$ तथा सी की मात्राओं में भी वृद्धि हुई है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रोफेसर एन० आर० धर, निदेशक, शीलाधर मृत्तिका विज्ञान गवेषणागार, प्रयाग विश्व विद्यालय के आभारी हैं जिन्होंने कार्य करने की सुविधा प्रदान की।

निर्देश

1. धर, एन० आर०, **अध्यक्षपदीय भाषण, इण्डियन साइंस कांग्रेस,** 1961.
2. ए० ओ० ए० सी०, Methods of Soil Analysis 1968.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 3, July, 1976, Pages 237-245

$+32°$ से $+35°$ के क्रांति क्षेत्र में वृहद यथार्थ गतियों का विश्लेषण

आर० एस० खण्डेवाल तथा ए० एन० गोयल
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—मार्च 30, 1976]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में (i) तारक अभिस्रवण (ii) सौर गति (iii) दीर्घवृत्तजीय संकल्पना तथा (iv) तारक अभिस्रवण से दीर्घवृत्तीय स्थिरांकों के लिये वृहद यथार्थ तारक गतियों का विश्लेषण दिया गया है।

Abstract

Analysis of large proper motions in declination zones $+32°$ to $+35°$. *By* R. S. Khandelwal and A. N. Goyal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

In the present paper we have analysed the large proper motions of stars for (i) star-streaming (ii) solar motion (iii) ellipsoidal hypothesis (iv) ellipsoidal constants from star-streaming.

प्रस्तावना

हमने $+32°$ से लेकर $35°$ क्रांति के अन्तर्गत वृहद यथार्थ गतियों का विश्लेषण सौर गतियों, अभिस्रवण स्थिरांकों तथा अभिवृत्तजीय स्थिरांकों के लिये किया है जिस पर हाल ही में अरावामुडान, [1] गोयल [2] खण्डेलवाल तथा गोयल [3] ने कार्य किया है। यथार्थ गतियों के प्राप्त करने की सामान्य विधि का विस्तृत विवरण गोयल [4] तथा खण्डेलवाल [5] ने दिया है। युगों में औसत अन्तर 40 वर्षों से अधिक है। दो या अधिक अतिव्याप्त क्षेत्रों से प्राप्त एकाकी यथार्थ गति के किसी एक निर्देशांक में सम्भावित त्रुटि 0.010 है। क्षेत्रों के विवरण सारणी I दिये गये हैं जो स्वतः स्पष्ट है। यथार्थ गतियों के अभाव में $8^h\ 15^m$, $9^h\ 45^m$, $11^h\ 15^m$ केन्द्र वाले तीन क्षेत्रों को सम्मिलित नहीं किया गया है।

सारणी 1

क्षेत्र	माध्य	माध्य	तारकों की संख्या	भार
I	$0^h 45^m$	$+33°$	693	2
II	$2^h 15^m$	$+33°$	457	2
III	$3^h 45^m$	$+33°$	478	2
IV	$5^h 15^m$	$+33°.6$	911	3
V	$6^h 45^m$	$+33°$	661	2
VI	$12^h 45^m$	$+32°.5$	314	1
VII	$14^h 15^m$	$+32°.5$	284	1
VIII	$15^h 45^m$	$+32°.5$	275	1
IX	$17^h 15^m$	$+32°.5$	353	1
X	$18^h 45^m$	$+32°.5$	546	2
XI	$20^h 15^m$	$+33°.3$	1364	3
XII	$21^h 45^m$	$+32°.5$	587	2
XIII	$23^h 15^m$	$+32°.5$	344	1

स्मार्ट [6] द्वारा दी गई विधि का अनुसरण करते हुये हमने सारणी 2 में आये hV_1, hV_2, θ_1, θ_2, N_1, N_2 के मान प्राप्त किया। अतिव्याप्त तारकों को एक तारक के रूप में मान लिया गया है।

अपवाह वक्रों का विश्लेषण

अधिकांश क्षेत्रों में अपवाह I अत्यन्त स्पष्ट था जबकि hV_2 के न्यून मानों के कारण अपवाह II का सपाट वक्र प्राप्त होता है। क्षेत्र I, II तथा VII में अपवाह I के स्थिति कोणों के विश्वस्त मान ज्ञात कर पाना सम्भव नहीं हो सका फलस्वरूप परवर्ती विश्लेषण में इन क्षेत्रों को सम्मिलित नहीं किया गया।

स्मार्ट [6] द्वारा दी गई योजना के अनुसार अपवाह I तथा II के अन्तिम सामान्य समीकरण निम्नवत प्राप्त हुये।

अपवाह I के लिये सामान्य समीकरण

$$7.4145\,X_1-0.0\quad Y_1-0.6363\,Z_1=0.7670$$
$$0.0\quad X_1+5.5575\,Y_1+0.6045\,Z_1=8.7404$$
$$-0.6363\,X_1+0.6045\,Y_1+7.0508\,Z_1=0.9169$$

अपवाह II के लिये सामान्य समीकरण

$$8.7767\,X_1-07867\,Y_1-1.0873\,Z_1=+1.0905$$
$$-0.7867\,X_1+8.0957\,Y_1+0.6959\,Z_1=-4.7004$$
$$-1.0873\,X_1+0.6959\,Y_1+9.1689\,Z_1=-8.5352$$

सारणी 2

	अपवाह I			अपवाह II		
	hV_1	θ_1	N_1	hV_2	θ_2	N_2
I	—	—	400	0.6	215°	293
II	—	—	300	0.6	205°	157
III	1·0	175°	178	0.5	265°	300
IV	0.9	145°	300	0.4	265°	611
V	1.0	265°	350	0.8	185°	311
VI	1.20	285°	150	0.8	195°	164
VII	—	—	84	0.8	185°	200
VIII	1.10	275°	125	0.8	155°	150
IX	1.40	275°	200	0.6	145°	153
X	1.0	85°	200	0.7	255°	346
XI	0.9	45°	700	0.7	225°	664
XII	1.0	15°	300	0.7	225°	287
XIII	0.9	5°	175	0.7	195°	168

अपवाह I तथा II के लिये दिये गये उक्त समीकरण समुच्चय से क्रमशः निम्नांकित मान प्राप्त होते हैं ।

अपवाह I	अपवाह II
$X_1=0.1037$	-0.0323
$Y_1=1.5722$	-0.5069
$Z_1=0.0046$	-0.8969
$A=86°.2$	$2.66°3$
$D=0°.2$	$-60.°5$
$hW_1=1.575$	$hW_1=1.031$

जहाँ संकेतों का यथावत् अर्थ है । कई क्षेत्रों तथा दोनों अपवाहों के स्थिति कोणों के परिगणित तथा प्रेक्षित मान सारणी 3 में दिए जा रहे हैं । इनसे प्राप्त सामान्य अनुरूपता असन्तोषजनक है जिसका कारण यही हो सकता है कि कई क्षेत्रों में अपवाह भलीभाँति परिभाषित नहीं हैं ।

वृहदवृत्तों का अभिसरण

माना कि वृहदवृत्त से एक शीर्ष की कोणीय दूरी β है । तो यदि सम्बन्धित स्थिति कोण के परिगणित तथा प्रेक्षित मान θ_c तथा θ_0 हों तो

$$\sin \beta = \sin \lambda \sin (\theta_c - \theta_0)$$

सारणी 3 के पाँचवे तथा नवें स्तम्भों में β के मान दिये गये हैं । जहाँ तक अपवाह I का सम्बन्ध हो, क्षेत्र VI, VII तथा, XI के लिये वृहद वृत्त 10° के भीतर से होकर गुजरते हैं; III, IV, V IX तथा X इन सभी क्षेत्रों के लिये 20° से होकर जब कि XII तथा XIII क्षेत्रों के लिये यह अत्यन्त दीर्घ है । अपवाह II में β के मान अन्तिम स्तम्भ में दिये हैं । इन अपवाह में I, II, V, VII, VIII तथा XIII क्षेत्रों के लिये वृहदवृत्त 10° से होकर तथा शेष के लिये 20° से होकर गुजरते हैं । क्षेत्र IV, X, तथा XI इसके अपवाद हैं ।

सारणी 3 के पाँचवे तथा नवें स्तम्भ में दिये गये β_1 तथा β_2 के भारित मान हैं ।

सारणी 4 में समीकरण $hV = hW \sin \lambda_1$ से परिगणित प्रक्षिप्त अपवाह वेग के परिगणित मानों तथा आवृति-वक्रों के विश्लेषण से प्राप्त मानों में तुलना दी गई है । λ_1 तथा λ_2 के मान पहले ही प्राप्त अपवाह शीर्षों की स्थिति से प्राप्त किये जाते हैं ।

तारक अभिस्रवण का शीर्ष विन्दु

यदि (η, ξ, ζ) अपवाह II की तुलना में अपवाह I के समष्टि (अवकाश) वेग के रैखिक संघटकों को व्यक्त करें तो

सारणी 3

स्थिति कोणों के परिगणित तथा प्रेक्षित मात

	अपवाह I				अपवाह II				भार
क्षेत्र	परिगणित	प्रेक्षित	अन्तर	(भारित)	परिगणित	प्रेक्षित	अन्तर	(भारित)	
	θ_c	θ°	$\theta_c-\theta^\circ$	β_1	θ_c	θ°	$\theta_c-\theta^\circ$	β_2	
I	—	—	—	—	215.8	215	0.98	0.43	2
II	—	—	—	—	214.65	205	9.65	3.99	2
III	134.8	175	—40.2	17.3	206.43	265	—58.57	19.70	2
IV	167.15	145	22.15	12.2	188.2	265	—76.80	26.60	3
V	209.7	265	—55.30	18.96	164.90	185	—20.10	6.37	2
VI	278.35	285	6.65	2.11	149.30	195	—45.70	3.89	1
VII	—	—	—	—	154.65	185	—30.35	9.60	1
VIII	310.15	275	35.15	7.65	165.60	155	10.60	3.48	1
IX	346.30	275	71.30	10.39	176.25	145	31.25	10.30	1
X	26.5	85	—58.50	19.67	187.30	255	—67.70	44.48	2
XI	48.7	45	3.70	2.8	197.63	255	—27.37	27.03	3
XII	71.9	15	56.9	32.67	206.20	255	—18.80	11.97	2
XIII	85.75	5	80.75	26.04	213.15	195	18.15	5.35	1

$$\xi = X_1 - X_2 = 0.130$$

$$\eta = Y_1 - Y_2 = 2.0791$$

$$\zeta = Z_1 - Z_2 = 0.9015$$

(यह मानते हुये कि शीर्ष गांगेय केन्द्र की दिशा के पड़ोस में है)

	शीर्ष काRA	86.°2
	शीर्ष का क्रांति (declination)	24°.1
तथा	hV	2.270

प्राप्त होते हैं। गांगेय निर्देशांकों में यह स्थिति

शीर्ष का देशान्तर : 352°.5

शीर्ष का अक्षांश : −2°.1

सारणी 4

	अपवाह I				अपवाह II			
		hV_1				hV_2		
	λ_1	परिगणित	प्रेक्षित	अन्तर	λ_2	परिगणित	प्रेक्षित	अन्तर
I					125°.50	0.84	0.60	0.24
II					136°.50	0.71	0.60	0.11
III	43°.2	1.080	1.00	+0.08	146°.20	0.57	0.40	0.07
IV	34°.15	0.881	0.90	−0.02	157°.65	0.47	0.40	0.07
V	35°.83	0.92	1.00	−0.08	150°.80	0.50	0.80	−0.03
VI	102°.43	1.538	1.20	+0.34	111°.14	0.96	0.80	0.16
VII	—	—	—	—	104°.55	0.99	0.80	0.19
VIII	136°.08	1.08	1.10	−0.02	96°.55	1.02	0.80	0.22
IX	146°.55	0.87	1.40	−0.53	92°.90	1·03	0.60	0.43
X	144°.36	0.92	1.00	−0.08	93.°75	1.03	0.70	0.33
XI	130°.67	1.19	0.90	+0.29	98°.70	1.02	0.70	0.32
XII	114°.80	1.43	1.00	0.43	105°.05	0.99	0,70	0.29
XIII	96°.16	1.57	0.90	0.67	114°.40	0.94	0.70	0.24

अभिस्रवण स्थिरांकों से सौर गति

हमारे विश्लेषण के अनुसार (सारणी 2), अपवाह I तथा II में तारकों की संख्यायें क्रमशः 2678 तथा 2975 हैं (इसमें वक्र I, II, VII को सम्मिलित नहीं किया गया क्योंकि इनका उपयोग अपवाह I के स्थिरांकों को ज्ञात करने के लिए नहीं किया गया) जिससे 0.90:1 अनुपात प्राप्त होता है।

माना कि hV_0 द्वारा तारकों की समग्रता के अनुसार सौर गति प्रदर्शित होती है और $(A_0\ D_0)$ सौर शीर्षों के निर्देशांक हैं तथा 0.9 के लिए p प्रयुक्त हुआ है। फलस्वरूप स्मार्ट तथा टन्नाहिल [7] की ही तरह हमें निम्न समीकरण मिलते हैं।

$$(p+1)\ hV_0 \cos A_0 \cos D_0 + phW_1 \cos A_1 \cos D_1 + hW_2 \cos A_2 \cos D_2 = 0$$

$$(p+1)\ hV_0 \sin A_0 \cos D_0 + phW_1 \sin A_1 \cos D_1 + hW_2 \sin A_2 \cos D_2 = 0$$

$$(p+1)\ hV_1 \sin D_0 + phW_1 \sin D_1 + hW_2 \sin D_2 = 0$$

इन समीकरणों को हल करने पर

सौर शीर्ष का R. A. $(A_0) = 286°.1$

क्रांति $(D_0) = 44°.9$

सौर चाल $hV_0 = 0.669$

ऐयरी की विधि से सौर गति का स्वतन्त्र निश्चयन करने पर

सौर शीर्ष का R. A.$(A_0) = 273°.1 \pm 1°.1$

क्रांति $(D_0) = 33°.2 \pm 0°.4$

दीर्घवृत्तजीय स्थिरांक

स्मार्ट [6] द्वारा दी गई विधि से दीर्घवृत्तजीय स्थिरांकों के स्वतन्त्र निश्चयन से हमें K/H, A तथा D के मान निम्नवत् प्राप्त होते हैं।

$$\frac{K}{H} = 0.85,\ A = 245°,\ D = 17°.8$$

अभिस्रवण स्थिरांकों से दीर्घवृत्तजीय स्थिरांक

स्मार्ट तथा टन्नाहिल (1939) के अनुसार दशा का समीकरण

$$a\triangle x + b\triangle G = q - q_0$$

लिखने पर जहाँ

$$\triangle x = q - q_0.\ \triangle G = G_0',\ q_0 = x_0 \sin^2 \chi_0$$

$$a = \sin^2 \chi_0;\ b = x_0 \sin^2 (G - G_0') \cos^2 g$$

x_0 का मान सन्निकट मान है जिसे $x_0=2.65$ तथा $G'_0=152°$ के सन्निकट मानों से प्राप्त करते हैं। अन्तिम सामान्य समीकरण निम्नवत् हैं।

$$7.2042\triangle x+2.9898\triangle G=-0.1099$$
$$2.9898\triangle x+25.4229\triangle G=0.8754$$

जिन्हें $\triangle x$ तथा $\triangle G$ के लिये हल करने से $\triangle x=-00.380$; $\triangle G=-0.0333$, $x=2.612$, $G_0=331°.9$ तथा $K/H=0.523$. $a, b, q, q-q_0$ के मान सारणी 5 में दिये हैं।

सारणी 5

क्षेत्र	a	b	q	$q-q_0$	अवशिष्ट
I	0.818	−1.701	2.202	+ 66	9
II	0.519	−2.114	1.435	+ 78	6
III	0.211	−1.764	0.655	+104	44
IV	0.037	−0.975	0.229	+133	99
V	0.075	−0.116	0.344	+149	144
VI	0.000	−0.008	2.526	− 85	− 84
VII	0.938	+0.338	2.307	−143	−130
VIII	0.803	+1.073	1.973	−126	− 88
IX	0.709	+1.860	1.771	− 83	− 20
X	0.733	+2.222	1.885	− 29	+ 48
XI	0.853	+1.848	2.297	− 69	+133
XII	0.976	+0.770	2.599	+ 50	+ 78
XIII	0.968	−0.560	2.632	+ 58	+ 40

विवेचना

यह काफी रोचक तथ्य है कि तारकों की वृहद यथार्थ गति से प्राप्त किये गये सौर शीर्ष तथा वेग के परिणाम उन अनेक अन्वेषकों के (यथा नाक्सशा [8], स्मार्ट [6] स्मार्ट तथा टन्नाहिल [7], वाकी [9], टन्नाहिल [10] एवर्ट [11], एवं गोयल तथा श्रृंगी [12] द्वारा प्राप्त फलों से जिनमें विश्लेषण करते समय ऐसे तारकों को सम्मिलित नहीं किया गया है, अधिक भिन्न नहीं है। यही हाल अभिस्रवण स्थिरांक स्वतंत्र

रूप से प्राप्त सौर गति, दीर्घवृत्तजीय स्थिरांकों तथा अभिस्रवण स्थिरांकों से प्राप्य दीर्घवृत्तजीय स्थिरांकों का है। अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि पहले के अन्वेषणों में वृहद यथार्थ गति तारकों की उपेक्षा वैध नहीं थी।

इतने पर भी यह ध्यान में रखना होगा यदि लघु यथार्थ गतियों के आँकड़ों में कुछ दीर्घ यथार्थ गति तारकों को सन्निविष्ठ कर देने से घातक फल प्राप्त हुये होते। पूर्ववर्ती कार्यकत्ताओं द्वारा दीर्घ यथार्थ गति तारकों की उपेक्षा को यह कह कर वैध माना जा सकता है कि ऐसे तारकों की यथार्थ गतियाँ उपलब्ध नहीं। किन्तु हमारे द्वारा प्राप्त फलों में केवल 3 क्षेत्रों को छोड़कर ऐसा नहीं है।

निर्देश

1. अरावामुडान, एस० Jour. des Qbs. 1956, **39**, 167; 1959 *a*, **42**, 39; 1959*b*, **42**, 123; 1960; **43**, 229; 1961, **44**, 268; 1964, **47**, 215; 1965, **48**, 167.
2. गोयल, ए० एन० **वही** 1958*a*; 4**1**, 21; 1958*b*; **41**, 182, Astronomischen Nachrichten *b* and 186, Heft 5, 196, 1961-62; Jour. des. Obs. 1964; **47**, 221 1965, **48**, 158.
3. खण्डेलवाल, आर० एस० तथा गोयल, ए० एन० IJPAM 1, No. 2, p. 192, 1970; 1, No. 3, p. 284, 1970; 2, No. 2, p. 155, 1971.
4. गोयल, ए० एन०, **पी० एच० डी० थीसिस, राजस्थान विश्वविद्यालय** 1961
5. खण्डेलवाल, आर० एस०, **पी० एच० डी० थीसिस, राजस्थान विश्वविद्यालय,** 1970
6. स्मार्ट, डब्लू० एम० Stellar Dynamics, **कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस**, 1938
7. स्मार्ट, डब्लू० एम० तथा टन्नाहिल, टी० आर०, Mon. Not. R. Astr. Soc. 1937, **98**, 563; 1939 **100**, 30
8. नाक्स शा, Mon. Not. R. Astr. Soc., 1934, **94**, 399.
9. वाके, Mon. Not. R. Astr. Soc., 1946, **106**, 274
10. टन्नाहिल, टी० आर०, Mon. Not. R. Astr. Soc. 1952, **112**, 3; 1954, **114**, 593, 461.
11. एवर्ट, डी० जी०, Mon. Not. R, Astr. Soc., 1954, **114**, 469
12. गोयल, ए० एन० तथा शृंगी, पी० सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया**, 1965, **35**, 169

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 3, July 1976, Pages 247-251

प्याज की जड़वृद्धि तथा विकास पर स्ट्रेप्टोमाइसिन का प्रभाव

एस० एस० पुरोहित, एस० सी० अमेटा तथा एम० आर० मेहता
राजकीय महाविद्यालय नाथद्वारा, राजस्थान

[प्राप्त—मार्च 17, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में प्याज की जड़वृद्धि तथा विकास पर स्ट्रेप्टोमाइसिन अकेले तथा ग्लाइकोल के साथ स्ट्रेप्टोमाइसिन के प्रभावों का अध्ययन दिया गया है।

Abstract

Studies on the root growth and development of allium cepa. Effects of streptomycin. *By* S. S. Purohit, S. C. Ameta and M. R. Mehta, Government College, Nathdwara (Rajasthan.)

The present paper deals with the effect of streptomycin either singly or in association with glycol on the root growth and development of allium cepa.

प्याज की जड़वृद्धि पर विभिन्न रसायनों के प्रभाव सम्बन्धी समीक्षात्मक लेख प्राप्य हैं[1–4]। इनके अध्ययन से पता चलता है कि स्ट्रेप्टोमाइसिन तथा उसके साथ ऐल्कोहली यौगिक यथा ग्लीसराल, ग्लाइकाल तथा सार्बिटाल का उच्चतर पादपों की जड़वृद्धि के सम्बन्ध में कोई महत्वपूर्ण कार्य नहीं हुआ। केवल इतना ही ज्ञात है कि 1% ग्लीसराल की उपस्थिति में स्ट्रेप्टोमाइसिन को स्प्रे करने से सेम पादपों द्वारा स्ट्रेप्टोमाइसिन का अवशोषण अधिक हुआ[7] तथा इंडोल ऐसीटिक अम्ल अथवा जिबरलिक अम्ल की उपस्थिति द्वारा भी अवशोषण में वृद्धि हुई[6]। प्रस्तुत अध्ययन में प्याज कन्दों के जड़वर्द्धन पर स्ट्रेप्टोमाइसिन अकेले तथा ग्लाइकाल के साथ क्या प्रभाव होगा, इसके सम्बन्ध में सूचना दी जा रही है।

प्रयोगात्मक

जड़ वर्धन के अध्ययन के लिये पूर्व वर्णित विधि[1, 2] प्रयुक्त की गई। प्याज कन्दों को साफ करके निर्जर्मित आसुत जल से धोया गया, उन्हें बम्बे के जल से भरे हुये जारों में अंकुरित होने दिया गया और तब स्ट्रेप्टोमाइसिन विलयन की भिन्न-भिन्न सन्द्रतायें डाली गईं। स्ट्रेप्टोमाइसिन (20μg/ml) तथा

ग्लाइकाल (40% v/v) के संग्रह विलयन तैयार किये गये और उन्हें शीतित्र में रखा गया। इनमें से तनुकरण द्वारा वांछित सांद्रता बम्बे के जल से प्राप्त की गई। प्याज कन्दों को स्ट्रेप्टोमासिन के 20, 15, 10, 5, 2$\mu g/ml$ सान्द्रता से उपचारित किया गया। समस्त उपचारित नमूनों में सबसे कम सान्द्रता पर जड़ों का वर्द्धन सबसे अधिक हुआ।

एक दूसरे प्रयोग में स्ट्रेप्टोमाइसिन की स्थिर सान्द्रता (2$\mu g/ml$) डाली गई और इसके साथ ग्लाइकाल की सान्द्रतायें परिवर्तित की गईं (0·5, 1·0, 2·0, 4·0% v/v)। जड़ों की वृद्धि प्रत्येक 24 घंटे बाद मापी गई।

परिणाम

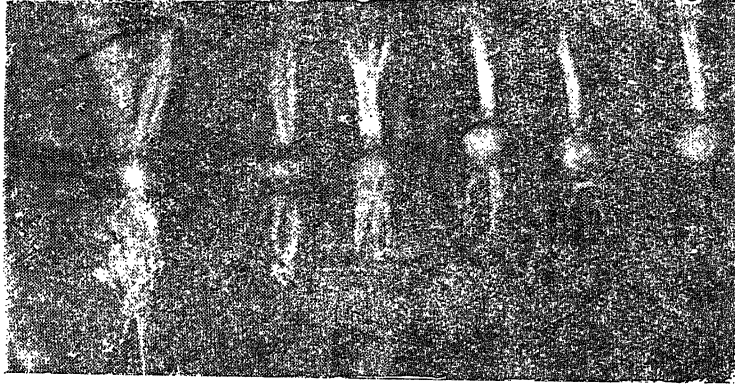
नियन्त्रण को छोड़कर समस्त उपचारों में जड़ वृद्धि अवरुद्ध हुई (सारणी 1), स्ट्रेप्टोमाइसिन की सान्द्रता बढ़ाने के साथ ही जड़ की लम्बाई घटती गई। 20$\mu g/ml$ सान्द्रता पर जड़ें क्षत हो गईं

सारणी 1 (अ)

प्याज की जड़ वृद्धि पर स्ट्रेप्टोमाइसिन का प्रभाव

ताप 27±2° से०

जड़ों की लम्बाई (सेमी०)						
	स्ट्रेप्टोमासिन की सान्द्रता μg/मिली०					
तिथि	0	2	5	10	15	20
5.11.74	0·7	0·6	0·6	0·3	0·2	0·1
6.11.74	2·0	1·4	1·3	1·1	0·9	0·5
7.11.74	2·2	1·7	1·5	1·3	1·1	1·0
8.11.74	2·9	1·8	1·6	1·4	1·2	1·0
9.11.74	3·5	2·6	2·2	1·6	1·5	1·3
10.11.74	3·8	2·7	2·3	1·8	1·6	1·3
11.11.74	4·0	2·8	2·4	2·0	1·6	1·3
12.11.74	4·3	2·9	2·7	2·2	1·7	1·4
13.11.74	4·4	2·9	2·8	2·8	1·8	1·4
14.11.74	4·9	3·3	3·0	2·5	1·9	1·4
15.11.74	5·3	3·5	3·1	2·5	1·9	1·4

और उनका रंग भूरा पीला हो गया। यह क्षति धीरे-धीरे कन्द के आधार की ओर अग्रसर होने लगी। $2\mu g/ml$ पर अधिकतम वृद्धि देखी गई फलस्वरूप यह सान्द्रता वृद्धि के लिये सर्वोत्तम पाई गई।

चित्र 1. प्याज की जड़वृद्धि पर स्ट्रेप्टोमाइसिन का प्रभाव
A=नियंन्त्रण $B=2\mu g/ml$ $C=5\mu g/ml$
$D=10\mu g/ml$ $E=15\mu g/ml$ $F=20\mu g/ml$

दूसरे प्रयोग में भी जड़ वृद्धि देखी गई (सारणी 2)। यह पाया गया कि 1% ग्लाइकाल मिलाने से जड़ की लम्बाई घटी और 2% ग्लाइकाल के साथ जड़ें क्षत हो गईं। इनके मूलाग्र गहरे भूरे पीले

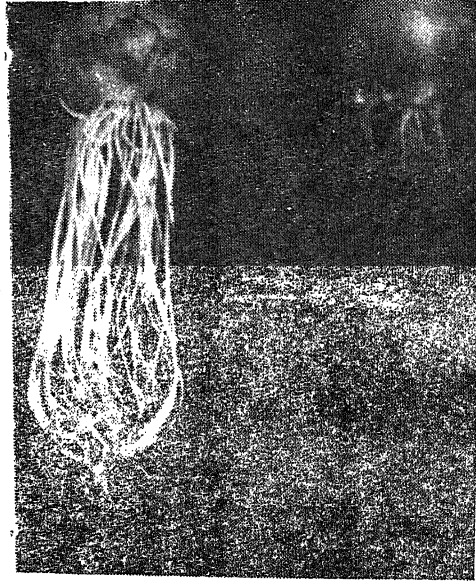
सारणी 1 (आ)

स्ट्रेप्टोमाइसिन की स्थिर सान्द्रता ($2\mu g$/मिली॰) के साथ ग्लाइकाल की विभिन्न सान्द्रताओं का प्रभाव ताप $27\pm2°$ से॰

तिथि	जड़ों की लम्बाई, सेमी॰ ग्लाइकाल की सान्द्रता %(v/v)					
	0	0·25	0·5	1·0	2·0	4·0
17.11.74	0·7	0·5	0·3	0·25	0·15	0·1
18.11.74	2·1	0·7	0·5	0·4	0·3	0·5
19.11.74	2·2	1·2	1·1	0·7	0·4	0·8
20.11.74	2·7	1·6	1·4	0·9	0·5	0·9
21.11.74	3·4	1·8	1·7	1·0	0·55	1·2
22.11.74	3·8	2·4	1·9	1·3	0·6	1·4
23,11.74	4·1	2·5	2·0	1·45	0·7	1·4
24.11.64	4·3	2·8	2·2	1·7	0·7	1·5
25.11.74	4·9	2·9	2·3	1·7	0·7	1·5

पड़ गये। इस सान्द्रता पर सबसे बड़ी विचित्रता यह देखी गई कि जड़ों का बंकन हो गया (चित्र 2)।

विवेचना

अब यह भलीभाँति स्थापित हो चुका है कि स्ट्रेप्टोमाइसिन, पेनिसिलिन तथा क्लोरैम्फेनिकाल जैसे ऐंटीबायोटिक जीवों की वृद्धि दर को प्रभावित करते हैं[11, 14] किन्तु पौधों की वृद्धि पर इन ऐंटीबायोटिकों के प्रभाव की ओर तनिक भी ध्यान नहीं दिया गया। उच्च पादपों द्वारा स्ट्रेप्टोमाइसिन के अवशोषण को प्रभावित करने वाले कारकों तथा प्रभावों का अध्ययन हुआ है[6-9]। इनके अनुसार इण्डोल ऐसीटिक अम्ल अथवा जिबरलिक अम्ल की उपस्थिति में स्ट्रेप्टोमाइसिन का अवशोषण बढ़ता है। ग्रे[7] ने 1% ग्लीसरॉल की उपस्थिति में सेम की पत्तियों द्वारा स्ट्रेप्टोमाइसिन अवशोषण में वृद्धि देखी। प्रस्तुत अध्ययन में सर्वाधिक अवशोषण 2% ग्लीसराल की उपस्थिति में पाया गया।

चित्र 2. स्ट्रेप्टोमाइसिन $(2\mu/ml)$ + ग्लीसराल का प्रभाव

A=नियन्त्रण B= स्ट्रेप्टोमाइसिन $(2\mu g/ml)$ + ग्लाइकाल $(2\% v/v)$

ग्रे[7] के अनुसार ग्लीसराल, ग्लाइकाल तथा सार्बिटाल जैसे हाइड्राक्सी यौगिक उच्चतर पादपों में स्ट्रेप्टोमाइसिन के अवशोषण को वर्द्धित करते हैं। ये सभी यौगिक प्राप्य हाइड्राक्सी समूहों (–OH) में अन्तर दिखाते हैं। प्रस्तुत अध्ययन में 2 प्राथमिक –OH समूह वाले ग्लइकाल की 2% सान्द्रता के साथ स्ट्रेप्टोमाइसिन का अधिकतम अवशोषण देखा गया। इस अवशोषण के साथ यह देखा गया कि जड़ों की वृद्धि अवरुद्ध हो गई और उनमें वंकन आ गया।

जड़वृद्धि का अवरोध आनुवंशिक कोड (code) के त्रुटिपूर्ण पड़ने के कारण हो सकता है। यह भी सूचित है[12, 13] कि स्ट्रेप्टोमाइसिन क्लोरोप्लास्ट का अवरोधक है। प्रोटीन संश्लेषण भी प्रभावित हो सकता है।

निष्कर्षतः यह कहा जा सकता है कि स्ट्रेप्टोमाइसिन की क्रिया उच्चतर पौदों के साथ वैसी ही होती है जैसी कि विभिन्न जीवाणुओं तथा नीलहरित शैवालों के साथ।

निर्देश

1. पुरोहित, एस० एस० तथा अनेटा, एस० सी०, **विज्ञान परि० अनु० पत्रिका,** 1972, **15**, 189-192.
2. वही, वही, 1973, **16**, 195-198.
3. वही, वही, 1974. **17**, (in Press).
4. कस्तूरबाई, ए० पी० तथा खान, **करेंट साइं०**, 1968, 37, 111-112.
5. आर्क, पीटर, ए० तथा विल्सन, ई० एम०, **फाइटो पैथोलाजी**, 1950, **46**, 634.
6. गुडमैन, आर० एन० तथा डोवर, डब्लू० एम०, Plant Disease Reporter, 1958. **42,** 122.
7. ग्रे, रीड, ए०, **फाइटोपैथोलाजी**, 1956, **46**, 105-111.
8. ग्रे, रीड, ए० तथा विल्सन, ई० एम०, **अमे० फाइटो पैथोलाजी सोसा०**, **46**, 634.
9. रोजेन, डब्लू० जी०, **प्रोसी० सोसा० एक्सप्रे० बायोला० तथा मेडि०**, 1954, 385-388.
10. विट्मान, एच० जी० तथा स्टाफलर, जी०, Protein biosynthesis, **नार्थ हालैंड पब्लि०** 1972, 285.
11. गुप्ता, आर० एस० तथा कुमार, एच० डी०, Arch. Mikrobiol, 1970, **70**, 313-329.
12. सेजर, आर०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस यू० एस०**, 1962, 48, 2018-2026.
13. एब्रिजर, बी० एल०, **जर्न० जन० माइक्रोबायो०**, 1970, **61**, 144-147.
14. कुमार, एच० डी० तथा मधुवाला, कौशिक, Z. Pflanze. physiology Bd. 1971, **65**, 433-52.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 3, July, 1976, Pages 253-257

N-क्लोरो पैराक्लोरो ऐसेटऐनिलाइड के पुनर्विन्यास पर आयनिक तीव्रता का प्रभाव—II

एम० एम० म्हाला, एम० डी० पटवर्धन, एस० डी० शर्मा तथा बी० के० गुप्ता

रसायन विभाग, शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, शिवपुरी

[प्राप्त—जनवरी 8, 1976]

सारांश

N-क्लोरो पैरा क्लोरो ऐसेटऐनिलाइड के पुनर्विन्यास के दर स्थिरांक हाइड्रोक्लोरिक एवं सल्फ्यूरिक अम्लों की सांद्रता के बढ़ाने से बढ़ते हैं। आयनिक तीव्रता के प्रभाव के अध्ययन के आधार पर इस अभिक्रिया में अम्ल उत्प्रेरण की प्रभाविता *N*-क्लोरो पैरा नाइट्रो ऐसेट ऐनिलाइड से अधिक पाई गई। डेबाई-हुकेल समीकरण से पूर्ण अभिक्रिया में अम्ल उत्प्रेरित दरों का योगदान अधिक तथा उदासीन दरों का योगदान उपेक्षणीय पाया गया। जुकर-हैमेट परिकल्पना, बुनेट तथा आर्हेनियस प्राचल से अभिक्रिया द्वि-अणुक पाई गई।

Abstract

Effect of ionic strength on the rearrangement of N-chloro-p-chloro acetanilide. Part II. *By* M. M. Mhala, M. D. Patwardhan, S. D. Sharma and B. K. Gupta, Department of Chemistry, Government Post graduate College, Shivpuri (M. P).

The rates for rearrangement of *N*-chloro p-chloroacetanilide increase with increase in concentration of hydrochloric and sulphuric acids. On the basis of studies in ionic strength effect, the effectiveness of acid catalysis in this reaction was found to be more than in *N*-chloro p-nitro acetanilide. With the help of Debye-Huckel equation in the overall reaction the contribution of acid catalysed rates was more and those of neutral rates was negligible. Zucker-Hammet hypothesis, Bunnett and Arrhenius parametres show bimolecular nature of reaction.

N-क्लोरो ऐसेटऐनेलाइड का पुनर्विन्यास जलीय एवं निर्जलीय माध्यम में हाइड्रोक्लोरिक (विशिष्ट उत्प्रेरक), सल्फ्यूरिक एवं नाइट्रिक अम्ल की उपस्थिति में होता है आर्थो तथा पैरा क्लोरो ऐसेट

ऐनिलाइड बनते हैं। N-क्लोरो पैरा नाइट्रो ऐसेटऐनिलाइड में अम्ल उत्प्रेरण की प्रभाविता नाइट्रो मूलक के ऋणात्मक प्रेरक स्वभाव के कारण N-क्लोरो ऐसेटऐनिलाइड की तुलना में अधिक पाई गई[1]। प्रस्तुत शोध-पत्र में N-क्लोरो ऐसेटऐनिलाइड में पैरा स्थिति में क्लोरीन का अम्ल उत्प्रेरण की प्रवृत्ति पर प्रभाव का अध्ययन किया गया है और प्राप्त परिणामों की विवेचना की गई है।

प्रयोगात्मक

N-क्लोरो पैरा क्लोरो ऐसेटऐनेलाइड को पैरा क्लोरो ऐसेटऐनिलाइड तथा सोडियम हाइपो-क्लोराइट से बनाया गया और उसका पुनः क्रिस्टलन लाइट पेट्रोलियम तथा क्लोरोफार्म से किया गया[2]।

सारणी 1

N-क्लोरो पैरा क्लोरो ऐसेट ऐनिलाइड का हाइड्रोक्लोरिक तथा सल्फ्यूरिक अम्ल में क्रमशः 30° और 40° पर पुनर्विन्यास

[M] HCl	प्रेक्षित 10^4K सेंकड$^{-1}$	परिकलित 10^4 K सेंकड$^{-1}$ अम्ल उत्प्रेरित	उदासीन	[M] H_2SO_4	प्रेक्षित 10^4K सेंकड$^{-1}$	परिकलित 10^4K सेंकड$^{-1}$ अम्ल उत्प्रेरित	उदासीन
0.1	1.5	2.8	0.5	0.1	0.24	0.06	0.01
0.2	3.3	4.4	,,	0.3	0.28	0.17	0.02
0.3	8.3	9.0	,,	0.5	0.42	0.26	0.04
0.4	11.6	12.6	,,	1.0	0.62	0.42	0.18
0.5	18.7	16.1	,,	1.5	0.83	0.50	0.8
×	18.0						
0.6	23.0	19.8	,,	2.0	0.89	0.53	3.4
0.7	27.0	24.2	,,	2.5	1.34	0.53	1.47
0.8	36.8	28.3	,,	3.0	1.57	0.50	64.5
1.0	44.4	38.0	,,	3.5	1.81	—	—
1.5	45.4	65.4	,,	4.0	2.96	—	—
				4.5	4.10	—	—
				5.0	5.26	—	—

× D_2O, 0.2 M HCl (E=16.2 Kcal |mole, $\triangle^s=-17,7$ e. u.; $A=5\times10^8$ सेंकड$^{-1}$)
3 M H_2SO_4 (E=10.52 Kcal |mole, $\triangle^s=-32.4$ e. u; $A=1.9\times10^4$ सेंकड$^{-1}$)

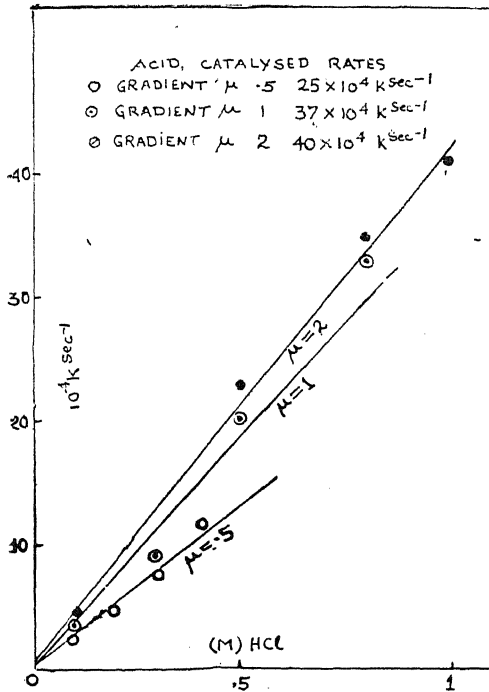
प्रेक्षित सक्रिय % क्लोरीन = 34.5

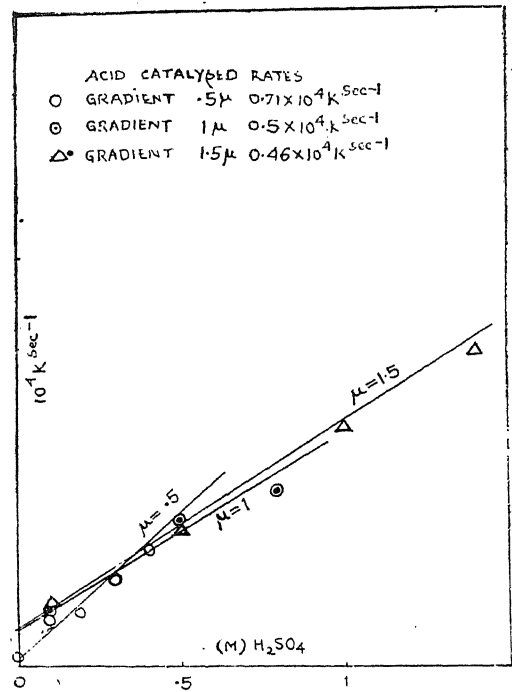
परिकलित सक्रिय % क्लोरीन = 34.8

प्रक्रिया : पुनर्विन्यास के दरों को पूर्व विधि के अनुसार निकाला गया[2]। पूर्ण कार्य में यौगिक सान्द्रता 0.0005 रखी गई।

परिणाम तथा विवेचना

N-क्लोरो पैरा क्लोरो ऐसेटऐनिलाइड के पुनर्विन्यास अभिक्रिया के दर स्थिरांक (10% ऐसिटिक अम्ल) हाइड्रोक्लोरिक अम्ल तथा सल्फ्यूरिक अम्लों की सान्द्रता के बढाने से बढते हैं (सारणी 1)। अम्लों में इस वृद्धि का कारण ज्ञात करने के लिए इस अभिक्रिया का विभिन्न स्थिर आयनिक तीव्रताओं पर अध्ययन किया गया। आयनिक तीव्रताएँ हाइड्रोक्लोरिक तथा सल्फ्यूरिक अम्लों में क्रमशः लिथियम क्लोराइड तथा लिथियम सल्फेट की उचित तथा आवश्यक मात्रा से स्थिर रखी गईं। इस अध्ययन से प्राप्त आँकडों को चित्र 1 तथा 2 में दर्शाया गया है तथा उनसे निष्कर्ष निकाले गये।

(अ) अम्ल उत्प्रेरित दरें आयनिक तीव्रताओं के प्रभाव पर निर्भर हैं क्योंकि प्रत्येक आयनिक तीव्रता पर अम्ल की सान्द्रता की वृद्धि के साथ पुनर्विन्यास की दरें बढ़ती हैं।

चित्र 1

N-क्लोरो पैरा क्लोरो ऐसेटऐनिलाइड पर में HCl–LiCl में आयनिक तीव्रता का प्रभाव

चित्र 2

N-क्लोरो पैरा क्लोरो ऐसेटऐनिलाइड पर H_2SO_4–Li_2SO_4 में आयनिक तीव्रता का प्रभाव

(ब) लिथियम क्लोराइड-हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में अम्ल उत्प्रेरित दरें धनात्मक लवण प्रभाव को ग्रहण करने की योग्यता रखती हैं क्योंकि आयनिक तीव्रता में वृद्धि होती है जबकि लिथियम सल्फेट सल्फ्यूरिक अम्ल में इसके विपरीत परिणाम मिले हैं।

(स) उदासीन दरों का योगदान उपेक्षणीय है।

अम्ल उत्प्रेरित एवं उदासीन दरों का परिकलन प्रत्येक अम्लीय सान्द्रता पर आयनिक तीव्रता के प्रभाव के अध्ययन से प्राप्त आँकड़ों से किया गया। इन परिकलित अम्ल उत्प्रेरित एवं उदासीन दरों का योग प्रयोग से प्रेक्षित दरों के अनुकूल पाया गया (सारणी 1), किन्तु लिथियम सल्फेट-सल्फ्यूरिक अम्ल में परिकलित दरों का योग प्रेक्षित दरों से अधिक रहा।

ज़ूकर-हेमेट परिकल्पना[3] से इस अभिक्रिया में जल के अणु की द्वि-अणुक न्यूक्लिओफिलिक क्रिया बताता है! यही निष्कर्ष बुनेट-प्राचल[4] से प्राप्त ढलानों के आधार पर निकाला गया। कुछ धनायनों (Li^+, K^+, Na^+) की उपस्थिति में पुनर्विन्यास की दरों में उनकी आयनिक त्रिज्याओं के बढ़ते क्रमानुसार वृद्धि होती है। इसका कारण संभवतः N-क्लोरो पैरा नाइट्रो ऐनेलाइड में दिये गये विवेचन के समान होता है[1]।

पुनर्विन्यास की दरें हाइड्रोक्लोरिक तथा सल्फ्यूरिक अम्लों में चार विभिन्न तापों पर 25°—60° में निकाली गई। परास दरों के लाग तथा $1/T$ के आरेख से प्राप्त सक्रियण ऊर्जा, एन्ट्रापी तथा आवृत्ति गुणक (सारणी 1) भी इस अभिक्रिया की द्वि-अणुक प्रवृति को आधार देते हैं[5]। ड्यूटीरियम ऑक्साइड में पुनर्विन्यास की दर बहुत कम मात्रा में घटती है ($KD_2O/KH_2O<1$), यह मंद प्रोटान अभिगमन घटाता है[6]।

N-क्लोरो ऐसेटऐनिलाइड में पैरा स्थिति में नाइट्रो मूलक अम्ल उत्प्रेरण की प्रभाविता को उसके ऋणात्मक प्रेरक स्वभाव के कारण बताता है। किन्तु पैरा स्थिति में क्लोरीन के कारण अम्ल उत्प्रेरण प्रभावित नाइट्रो मूलक की उपस्थिति से भी अधिक हो जाती है। (लिथियम सल्फेट-सल्फ्यूरिक अम्ल तथा लिथियम क्लोराइड-हाड्रोक्लोरिक अम्ल में आपेक्षिक अम्ल उत्प्रेरित दरें क्रमशः 28.1×10^4 सेंकड$^{-1}$ तथा 67.6×10^4 सेंकड$^{-1}$) इस अम्ल उत्प्रेरण प्रभाविता में वृद्धि का कारण क्लोरीन का धनात्मक मेसोमरी प्रभाव है जिसके कारण नाइट्रोजन पर प्रोटानीकरण तथा N-Cl बंध से क्लोरीन का Cl^+ के रूप में निकलना समक्षणिक होता है।

N-क्लोरो पैरा क्लोरो ऐसेटऐनिलाइड के पुनर्विन्यास से अन्तिम उत्पाद 2 : 4 ऐसेटऐनिलाइड प्राप्त किया गया। उक्त विवेचन के आधार पर N-क्लोरो पैरा क्लोरो ऐसेटऐनिलाइड में अम्ल उत्प्रेरित एवं उदासीन पुनर्विन्यास की क्रियाविधि N-क्लोरो पैरानाइट्रो ऐसेटऐनिलाइड के पुनर्विन्यास की क्रियाविधि के समान प्रस्तावित की जा सकती है[1]।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस प्रपत्र के लेखक प्राचार्य श्री ए० के० मजुमदार तथा डा० दयालसिंह, अध्यक्ष रसायन विभाग, शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय शिवपुरी, के प्रति अभारी हैं जिन्होंने इस कार्य में सभी सुविधाएँ प्रदान कीं।

निर्देश

1. म्हाला, एम० एम०, पटवर्धन, एम० डी०, शर्मा, एस० डी० तथा गुप्ता बी० के०, **विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका** में प्रकाशनार्थ स्वीकृत।
2. देवार, एम० जे० एस० तथा स्काट, जे० एम० डब्लू०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1955, 1845.
3. जुकर, एल० तथा हेमेट, एल० पी०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1939, **61**, 2791.
4. बनेट, जे० एफ०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1939, **63**, 4956.
5. शालेगार, एल० एल० तथा लॉग, एफ० ए०, 'Advances in Physical Organic Chemistry' भाग I, सम्पादक, वी० गोल्ड, **एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क**, 1963.
6. बेल, आर०, पी०, 'Acid Base Catalysis', **क्लारेंडान प्रेस, आक्सफोर्ड**, 1949.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No 3, July, 1976, Pages 259-264

कतिपय बहुपदों के जनक फलन

जी० बी० महाजन
गणित विभाग, राजकीय विज्ञान महाविद्यालय, रीवाँ

[प्राप्त—दिसम्बर 9, 1975]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदों एवं कई चरों में हाइपरज्यामितीय श्रेणी के लिये कुछ एकैकी जनक फलन प्राप्त करना है। कतिपय संबद्ध विशिष्ट दशाओं की भी व्याख्या की गई है।

Abstract

Generating functions for certain polynomials in several variables. *By* G. B. Mahajan, Department of Mathematics, Government Science College, Rewa.

In the present paper, some bilinear generating functions for the generalized hypergeometric polynomials and hypergeometric series in several variables have been established. Some interesting particular cases relevant to the present discussion have also been given.

1. विषय प्रवेश

बहुपद समुच्चयों के अध्ययन में जनक फलनों का महत्वपूर्ण हाथ है। प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदों एवं कई चरों में हाइपरज्यामितीय श्रेणी के लिये कुछ एकैकी जनक फलन प्राप्त करना है। सूत्रों में आये फलनों की सार्वीकृत प्रकृति के कारण यहाँ पर सिद्ध किये गये फलों के माध्यम से हम कई ज्ञात फलनों की रोचक एकात्मकता प्राप्त होती है। इनमें से कुछ रोचक विशिष्ट दशाओं की विवेचना की जावेगी।

कई फलनों वाला सार्वीकृत लारिसेला फलन श्रीवास्तव तथा डाउस्ट[6] के कारण है और समिका (1·1) द्वारा परिभाषित है :

$$F^{A\,:\,B',\,\ldots B(n)}_{C\,:\,D',\,\ldots D(n)}\left[\begin{matrix}[(a):\theta',\ldots,\theta^{(n)}]:[(b'):\phi'];\ldots;[(b^{(n)}:\phi^{(n)}];\\ [(c):\psi',\ldots\psi^{(n)}]:[(d'):\delta'];\ldots;[(d^{(n)}):\delta^{(n)}];\end{matrix}\; z_1,\ldots,z_n\right] \tag{1·1}$$

$$=\sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{A}(a_j,m_1\theta_j'+\ldots+m_n\theta_j^{(n)})\prod_{j=1}^{B'}(b_j'(m_1\phi_j')\ldots}{\prod_{j=1}^{C}(c_j.\,m_1\psi_j'+\ldots+m_n\psi_j^{(n)})\prod_{j=1}^{D'}(d_j',m_1\delta_j')\ldots}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{B(n)}(b_j^{(n)},m_n\phi_j^{(n)})}{\prod_{j=1}^{D(n)}(d_j^{(n)},m_n\delta_j^{(n)})}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{z_n^{m_n}}{m_n!},$$

जहाँ समस्त θ, ψ, ϕ तथा δ धन अचर हैं। सुविधा हेतु A प्राचलों के अनुक्रम $a_1, \ldots, a_A$ को (a) द्वारा, प्राचलों के समुच्चय $b_1^{(j)}, \ldots, b_{B(j)}^{(j)}$, $j=1, \ldots, n$ को $B^{(j)}$ द्वारा संक्षेपण किया गया है। (c) तथा $(d^{(j)})$ भी ऐसे ही द्योतन करेगा, (α, m)-पोच्छामर सकेत हैं जिसे

$$(\alpha,m)=\frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)}=\begin{cases}1, & \text{यदि } m=0\\ \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1). & \text{यदि } m=1,2,2,3,\ldots.\end{cases} \tag{1·2}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है।

उपर्युक्त लेखकों ने अपने परवर्ती प्रपत्र[7] में बहुक श्रेणी (1·1) के अभिसरण प्रतिबन्धों की विवेचना की है।

2. निम्नलिखित पर विचार करें

$$(1-t)^{-\lambda}F^{1\,:\,B',\,\ldots,\,B(n)}_{-\,:\,D',\,\ldots,\,D(n)}\left[\begin{matrix}\lambda:[(b'):\phi'];\ldots;[(b^{(n)}):\phi^{(n)}];\\ -:[(d'):\delta'];\ldots;[(d^{(n)}):\delta^{(n)}];\end{matrix}\right.$$

$$\left.\times\frac{z_1}{1-t},\ldots,\frac{z_\gamma}{1-t},\frac{-z_{\gamma+1}t}{1-t},\ldots,\frac{-z_nt}{1-t}\right]$$

$$=\sum_{m_1,\ldots,m_\gamma=0}^{\infty}\frac{(\lambda,M_\gamma)\sum_{j=1}^{B'}(b_j',m_1\phi_j')\ldots\prod_{j=1}^{B^{(\gamma)}}(b_j^{(\gamma)},m_\gamma\phi_j^{(\gamma)})}{\prod_{j=1}^{D'}(d_j',m_1\delta_j')\ldots\prod_{j=1}^{D^{(\gamma)}}(d_j^{(\gamma)},m_\gamma\delta_j^{(\gamma)})}\prod_{j=1}^{\gamma}\frac{z_j^{mj}}{m_j!}$$

$$\times(1-t)^{-(\lambda+M\gamma)}\sum_{m_{\gamma+1_1},\ldots,m_n=0}^{\infty}\frac{(\lambda+M_\gamma,M_{n-\gamma})\prod_{j=1}^{B(\gamma+1)}(b_j^{(\gamma+1)},m_{\gamma+1}\phi_j^{(\gamma+1)})\ldots}{\prod_{j=1}^{D(\gamma+1)}(d_j^{(\gamma+1)},m_{\gamma+1}\delta_j^{(\gamma+1)})\ldots}$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{B(n)} (b_j^{(n)}, m_n \phi_j^{(n)})}{\prod_{j=1}^{D(n)} (d_j^{(n)}, m_n \delta_j^{(n)})} \frac{\left(\frac{-z_{\gamma+1} t}{1-t}\right)^{m_{\gamma+1}}}{m_{\gamma+1}!} \cdots \frac{\left(\frac{-z_n t}{1-t}\right)^{m_n}}{m_n!},$$

जहाँ सुविधा हेतु हमने $M_\gamma = m_1 + \ldots + m_\gamma$ एवं $M_{n-\gamma} = m_{\gamma+1} + \ldots + m_\eta$ मान लिया। अन्तिम पंक्ति में, जो

$$(1-t)^{-(\lambda+M_\gamma)} F^{1\,:\,B(\gamma+1),\,\ldots,\,B^{(n)}}_{-\,:\,D(\gamma+1),\,\ldots,\,D^{(n)}} \left[\begin{matrix} \lambda+M_\gamma : [(b^{(\gamma+1)}) : \phi^{(\gamma+1)}]; \ldots; \\ - : [(d^{(\gamma+1)} : \delta^{(\gamma+1)}]; \ldots; \end{matrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{matrix} [(b^{(n)}) : \phi^{(n)}]; \\ [(d^{(n)} : \delta^{(n)}]; \end{matrix} \frac{-z_{\gamma+1} t}{1-t}, \ldots, \frac{-z_n t}{1-t}\right],$$

के तुल्य है, हम श्रीवास्तव[4] के निम्नलिखित ज्ञात सूत्र का प्रयोग करेंगे

$$(1-t)^{-\lambda} F^{1\,:\,B',\,\ldots,\,B(k)}_{-\,:\,D',\,\ldots,\,D(k)} \left[\begin{matrix} \lambda : [(b') : \phi']; \ldots; [(b^{(k)} : \phi^{(k)}]; \\ - : (d') : \delta']; \ldots; [(d^{(k)}) : \delta^{(k)}]; \end{matrix} \frac{-z_1 t}{1-t}, \ldots, \frac{-z_k t}{1-t}\right] \tag{2·1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda, n)}{n!} F^{1\,:\,B',\ldots,\,B(k)}_{-\,:\,D',\,\ldots,\,D(k)} \left[\begin{matrix} -n : [(b') : \phi']; \ldots : [(b^{(k)}) : \phi^{(k)}]; \\ - : [(d') : \delta']; \ldots; [(d^{(k)}) : \delta^{(k)}]; \end{matrix} z_1, \ldots, z_k\right] t^n.$$

काफी सरलीकरण के पश्चात हमें अन्त में निम्नांकित प्रधान फल उपलब्ध होता है :

$$(1-t)^{-\lambda} F^{1\,:\,B',\,\ldots,\,B^{(n)}}_{-\,:\,D',\,\ldots,\,D^{(n)}} \left[\begin{matrix} \lambda : [(b') : \phi']; \ldots; [(b^{(n)}) : \phi^{(n)}]; \\ : [(d') : \delta'] : \ldots; [(d^{(n)}) : \delta^{(n)}]; \end{matrix}\right.$$

$$\left.\times \frac{z_1}{1-t}, \ldots, \frac{z_\gamma}{1-t}, \frac{-z_{\gamma+1} t}{1-t}, \ldots, \frac{-z_n t}{1-t}\right] \tag{2·2}$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\lambda, N)}{N!} F^{1\,:\,B',\,\ldots,\,B^{(\gamma)}}_{-\,:\,D',\,\ldots,\,D^{(\gamma)}} \left[\begin{matrix} \lambda+N : [(b') : \phi']; \ldots; [(b^{(\gamma)}) : \phi^{(\gamma)}]; \\ -- : [(d') : \delta']; \ldots; [(d^{(\gamma)}) : \delta^{(\gamma)}]; \end{matrix} z_1, \ldots, z_\gamma\right]$$

$$\times F^{1\,:\,B(\gamma+1),\,\ldots,\,B^{(n)}}_{-\,:\,D(\gamma+1),\ldots,\,D^{(n)}} \left[\begin{matrix} -N : [(b^{(\gamma+1)}) : \phi^{(\gamma+1)}]; \ldots; [(b^{(n)}) : \phi^{(n)}]; \\ - : [(d^{(\gamma+1)}) : \delta^{(\gamma+1)}]; \ldots; [(d^{(n)}) : \delta^{(n)}]; \end{matrix} z_{\gamma+1}, \ldots; z_n\right] t^N,$$

बशर्ते कि $|t| < 1$ तथा $\left|\frac{z_i}{1-t}\right|$, $\left|\frac{z_j t}{1-t}\right|$, $i = 1, \ldots, r$; $j = r+1, \ldots, n$ उपयुक्त रीति से प्रतिबंधित हैं जिससे (2·2) में निहित श्रेणी या तो पूर्णतया अभिसारी है या समाप्त हो जाती है।

स्पष्ट है कि सूत्र (2·2) में कई रोचक फल निहित हैं। इसकी कतिपय दशाओं की विवेचना को सुविधाजनक बनाने के लिये हम समस्त $\phi = \delta$ को 1 चुनते हैं जिससे (2·2) अगे दिया रूप धारण कर लेता है।

$$(1-t)^{-\lambda} F^{(n)}\left[\begin{matrix}\lambda : (b'_{B'}); \ldots; (b^{(n)}_{B(n)}); \\ -: (d'_{D'}); \ldots; (d^{(n)}_{D(n)});\end{matrix} \frac{z_1}{1-t}, \ldots, \frac{z_\gamma}{1-t}, \frac{-z_{\gamma+1}t}{1-t}, \ldots, \frac{-z_n t}{1-t}\right] \tag{2·3}$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\lambda, N)}{N!} F^{(\gamma)}\left[\begin{matrix}\lambda+N : (b'_{B'}); \ldots : (b^{(\gamma)}_{D(\gamma)}); \\ -: (d'_{D'}); \ldots; (d^{(\gamma)}_{D(\gamma)});\end{matrix} z_1, \ldots, z_\gamma\right]$$

$$\times F^{(n-\gamma)}\left[\begin{matrix}--: (b^{(\gamma+1)}_{B(\gamma+1)}; \ldots; (b^{(n)}_{B(n)}); \\ -: (d^{(\gamma+1)}_{D(\gamma+1)}; \ldots; (d^{(n)}_{D(n)};\end{matrix} z_{\gamma+1}, \ldots, z_n\right] t^N,$$

बशर्ते कि $|t|<1$, $B_i \leqq D_i-1$, लेकिन यदि $B_i=D_i$, $i-1, \ldots, n$, तो

$$\max.\left\{\left|\frac{z_1}{1-t}\right|+\ldots+\left|\frac{z_\gamma}{1-t}\right|+\left|\frac{z_{\gamma+1}t}{1-t}\right|+\ldots+\left|\frac{z_n t}{1-t}\right|\right\}<1.$$

चरों की संख्या बताने के लिये शीर्षाक्षर γ तथा $n-\gamma$ लिखे गये हैं, $(b^{(j)}_{B(j)})$ का अर्थ है $B^{(j)}$ प्राचलों के अनुक्रम $b^{(j)}_1, \ldots, b^{(j)}_{E(j)}$ को संक्षेप करना और इसी प्रकार से $(d^{(k)}_{D(k)})$, $j. k=1, \ldots, n$ के लिये भी। (:) तथा (;) $(a, m_1+\ldots+m_k)$ तथा $(\beta_1, m_1), \ldots, (\beta_k, m_k)$ रूप पृथक हैं। रिक्त गुणनफल को इकाई माना गया है और यही व्याख्या समस्त शोधपत्र में बनाई रखी जावेगी।

निस्सन्देह सूत्र (2·3) को निम्नलिखित दो महत्वपूर्ण फलों [4, p. 79 (2·8) and p. 88 (4·10] के एकीकृत रूप में देखा जा सकता है।

$$(1-t)^{-\lambda} F^{(\gamma)}\left[\begin{matrix}\lambda :(b'_{B'}); \ldots; (b^{(\gamma)}_{B(\gamma)}); \\ -: (d'_{D'}); \ldots; (d^{(\gamma)}_{D(\gamma)});\end{matrix} \frac{z_1}{1-t}, \ldots, \frac{z_\gamma}{1-t}\right] \tag{2·4}$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\lambda, N)}{N!} F^{(\gamma)}\left[\begin{matrix}\lambda+N : (b'_{B'}); \ldots; (b^{(\gamma)}_{B(\gamma)}); \\ : (d'_{D'}); \ldots; (d^{(\gamma)}_{D(\gamma)});\end{matrix} z_1, \ldots, z_\gamma\right] t^N,$$

बशर्ते कि $\max.\left\{\left|\frac{z_1}{1-t}\right|+\ldots+\left|\frac{z_\gamma}{1-t}\right|\right\}<1$, $|t|<1$,

तथा

$$(1-t)^{-\lambda}\ F^{(k)}\left[\begin{matrix}\lambda : (b'_{B'}); \ldots; (b^{(k)}_{B(k)}); \\ -: (d'_{D'}); \ldots; (d^{(k)}_{D(k)});\end{matrix}\ \frac{-z_1 t}{1-t}, \ldots, \frac{-z_k t}{1-t}\right] \qquad (2\cdot5)$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(\lambda, N)}{N!}\ F^{(k)}\left[\begin{matrix}-N : (b'_{B'}); \ldots; (b^{(k)}_{B(k)}); \\ -: (d'_{D'}); \ldots; (d^{(k)}_{D(k)}):\end{matrix}\ z_1, \ldots, z_d\right] t^N,$$

बशर्ते कि $\max.\left\{\left|\frac{z_1 t}{1-t}\right|+\ldots+\left|\frac{z_k t}{1-t}\right|\right\}<1, |t|<1.$

पुनश्च (2·3) में $z_1=z, z_2\to0, \ldots, z_{n-1}\to0, z_n=x$ रखने पर

$$(1-t)^{-\lambda}\ F^{(2)}\left[\begin{matrix}\lambda : (b_B); (b'_{B'}); \\ -: (d_D); (d'_{D'});\end{matrix}\ \frac{z}{1-t}, \frac{-xt}{1-t}\right] \qquad (2\cdot6)$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(\lambda, N)}{N!}\ {}_{B'+1}F_{D'}\left[\begin{matrix}-N, (b'_{B'}); \\ (d'_{D'});\end{matrix}\ x\right]\ {}_{B+1}F_D\left[\begin{matrix}\lambda+N, (b_B); \\ (d_D);\end{matrix}\ z\right] t^N,$$

प्राप्त होता है जो सूत्र [5, p. 228 (11)] है।

यहाँ यह इंगित करना प्रासंगिक होगा कि सूत्र (2·4), (2·5) तथा (2·6) को आगे भी कई जनक फलनों में विशिष्टीकृत किया जा सकता है।

3. इस अनुभाग में फल (2·3) का उपयोग सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदों तथा कई चरों में हाइपरज्यामितीय श्रेणी के लिये कतिपय एकैकी जनक फलन प्राप्त करने के लिये किया जावेगा।

हम अनेक चरों में जैकोबी, लागेर तथा हरमाइट बहुपदों को निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :

$$P_n^{(\alpha_1, \beta_1-n; \ldots; \alpha_k, \beta_k-n)}(1-2x_1; \ldots; 1-2x_k) \qquad (3\cdot1)$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{k}(1+\alpha_i, n)}{(n!)^k}\ F_A^{(k)}\left[\begin{matrix}-n : 1+\alpha_1+\beta_1; \ldots; 1+\alpha_k+\beta_k; \\ - : 1+\alpha_1; \ldots; 1+\alpha_k;\end{matrix}\ x_1, \ldots, x_k\right];$$

$$L_n^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}(x_1, \ldots, x_k) \tag{3·2}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{k}(1+\alpha_i, n)}{(n!)^k} \psi_2^{(k)}(-n, 1+\alpha_1, \ldots, 1+\alpha_k; x_1, \ldots, x_k);$$

$$H_{2n}(x_1, \ldots, x_k) \tag{3·3}$$

$$= \frac{(-1)^n (2n)!}{n!} \psi_2^{(k)}(-n; \tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{2}; x_1^2, \ldots, x_k^2);$$

तथा

$$H_{2n+1}(x_1, \ldots, x_k) \tag{3·4}$$

$$= \frac{(-1)^k 2^k x_1 \ldots x_k (2n+1)!}{n!} \psi_2^{(k)}(-n; \tfrac{3}{2}, \ldots, \tfrac{3}{2}; x_1^2, \ldots, x_k^2):$$

जहाँ $F_A^{(k)}$ लारिसेला प्रथम फलन है और $\psi_2^{(k)}$ कई चरों वाले $F_A^{(k)}$ (अथवा $F_B^{(k)}$) [1, p. 385] का संगमी रूप है।

उपर्युक्त सार्वीकरण पराशर[3] एवं जैन तथा देव[2] द्वारा दी गई परिभाषाओं से जो दो चरों के लिये हैं, मेल खाता है।

उपर्युक्त परिभाषाओं के परिप्रेक्ष्य में हम (2·3) से कई चरों वाले बहुपदों के निम्नलिखित एकैकी जनक फलन लिख सकते हैं।

$$(1-t)^{-\lambda} F_A^{(\gamma+k)}\begin{bmatrix}\lambda : b_1, \ldots, b_\gamma; 1+\alpha_1+\beta_1; \ldots; 1+\alpha_k+\beta_k; \\ - : d_1; \ldots; d_\gamma; 1+\alpha_1; \ldots; 1+\alpha_k;\end{bmatrix}$$

$$\times \frac{z_1}{1-t}, \ldots, \frac{z_\gamma}{1-t}, \frac{-(1-x_1)t}{2(1-t)}, \ldots, \frac{-(1-x_k)t}{2(1-t)}\Bigg] \tag{3·5}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda, n)(n!)^{k-1}}{\prod_{i=1}^{k}(1+\alpha_i, n)} P_n^{\alpha_1, \beta_1-n; \ldots; \alpha_k, \beta_k-n}(x_1, \ldots, x_k),$$

$$\times F_A^{(\gamma)}\begin{bmatrix}\lambda+n : b_1; \ldots; b_\gamma; \\ - : d_1; \ldots; d_\gamma;\end{bmatrix} z_1 \ldots, z_\gamma\Bigg] t^n;$$

$$(1-t)^{-\lambda} \psi_2^{(\gamma+k)}\Big(\lambda; d_1, \ldots, d_\gamma, 1+\alpha_1, \ldots, 1+\alpha_k;$$

$$\times \frac{z_1}{1-t}, \ldots, \frac{z_\gamma}{1-t}, \frac{-x_1 t}{1-t}, \ldots, \frac{-x_n t}{1-t}\Big) \tag{3·6}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda, n)(n!)^{k-1}}{\prod_{i=1}^{k}(1+\alpha_i, n)} L_n^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}(x_1, \ldots, x_k)\, \psi_2^{(\gamma)}(\lambda+n; d_1, \ldots, d_\gamma; z_1, \ldots, z_k)\, t^n,$$

$$(1-t)^{-\lambda}\, \psi_2^{(\gamma+k)}\left(\lambda; d_1, \ldots, d_\gamma, \tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{2}; \frac{z_1}{1-t}, \ldots, \frac{z_\gamma}{1-t}, \frac{-x_1^2 t}{1-t}, \ldots, \frac{-x_k^2 t}{1-t}\right) \tag{3·7}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\lambda, n)}{(2n)!} H_{2n}(x_1, \ldots, x_k)\, \psi_2^{(\gamma)}(\lambda+n; d_1, \ldots, d_\gamma; z_1, \ldots, z_\gamma)\, t^n;$$

तथा

$$2^k x_1 \ldots x_k (1-t)^{-\lambda}\, \psi_2^{(\gamma+k)}\left(\lambda; d_1, \ldots, d_\gamma, \tfrac{3}{2}, \ldots, \tfrac{3}{2}; \frac{z_1}{1-t}, \ldots, \frac{z_\gamma}{1-t}, \frac{-x_1^2 t}{1-t}, \ldots, \frac{-x_k^2 t}{1-t}\right) \tag{3·8}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\lambda, n)}{(2n+1)!} H_{2n+1}(x_1, \ldots, x_k)\, \psi_2^{(\gamma)}(\lambda+n; d_1, \ldots, d_\gamma; z_1, \ldots, z_\gamma)\, t^n.$$

विशिष्ट दशायें

फल (3·6) में t के स्थान पर $\frac{t}{\lambda}$ रखने और $\lambda \to \infty$ होने पर

$$e^t\, {}_0F_1\left[\begin{matrix} -; \\ 1+\alpha_1; \end{matrix} -x_1 t\right] \ldots {}_0F_1\left[\begin{matrix} -; \\ 1+\alpha_k; \end{matrix} -x_k i\right] \tag{3·9}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^{k-1}}{\prod_{i=0}^{k}(1+\alpha_i, n)} L_n^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}(x_1, \ldots, x_k)\, t^n,$$

जो [3] (2·2) में का सार्वीकरण है ।

(ii) (3·8) तथा (3·9), में t के स्थान पर $\frac{t^2}{\lambda}$ रखने और $\lambda \to \infty$ होने पर

$$e^{t^2} \prod_{i=1}^{k} [\cos(2x_i t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} H_{2n}(x_1, \ldots, x_k)\, t^{2n}; \tag{3·10}$$

$$e^{t^2} \prod_{i=1}^{k} [\sin(2x_i t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} H_{2n+1}(x_1, \ldots, x_k)\, t^{2n+k}; \tag{3·11}$$

जो [3] में वास्तव में सूत्र (2·6) के तथा (2·7) के सार्वीकरण हैं ।

(iii) सीमान्तकारी दशा $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3\to0$, ..., $x_k\to0$ में (3·5), (3·6), (3·7) एवं (3·8) से दो चरों वाले बहुपदों के एकैकी जनक फलन मिलते हैं जब कि $x_1=x$, $x_2\to0$, ..., $x_k\to0$ से ये ही एक चर वाले बहुपदों के एकैकी जनक सम्बन्ध प्रदान करते हैं।

(iv) स्पष्ट है कि एकैकी जनक फलन कई चरों वाले बहुपदों के लिये सरल जनक फलनों में समानीत हो सकते हैं जिनसे चलकर हमे एक तथा दो चरों में[2, 3] हाइपरज्यामितीय बहुपदों के ज्ञात जनक फलन प्राप्त हो सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० आर० सी० वर्मा का अत्यन्त आभारी है जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में अमूल्य मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral transforms, **भाग I, मैकग्राहिल न्यूयार्क**, 1954.
2. जैन, आर० एन० तथा देब, सी० के०, **रिसर्च जर्न० साइंस इंदौर विश्वविद्यालय**, 1972, **1**, 17-25
3. पाराशर, बी० पी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइं० इंडिया**, 1967, **37**, 41-48
4. श्रीवास्तव, एच० एम०, Comment. Math. Univ. St. Pauli, 1972,**XXI-1**, 73-99.
5. वही, The Mathematics Student, 1972, **XL**, 225-230.
6. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा डाउस्ट, एम० सी०, Nederl. Akad. Wetensch. Proc, 1969, A **72**, Indag. Math., 31, 449-457.
7. वही, Math. Nachr., 1972, **53**, 151-159.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 3, July 1976, Pages, 267-272

H-फलन के कतिपय तत्समक

परमानन्द आनंदानी
गणित विभाग, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यलय, भोपाल

[प्राप्त—जून 26, 1976]

सारांश

इस शोध-पत्र का उद्देश्य फाक्स के H-फलन के लिये तत्समक (Identities) स्थापित करना है। ऐसा विश्वास है कि प्रस्तुत परिणाम नये हैं।

Abstract

Some identities for H-function. *By* P. Anandani, Department of Mathematics, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal.

The object of the present paper is to establish some identities for Fox's H-Function. The results are believed to be new.

1. H-फलन फाक्स [3] द्वारा प्रस्तुत किया गया है। उसकी सत्यता के प्रतिबंधों, उपगामी-प्रसारों (asymptotic expansions) तथा वैश्लेषिक संतता की विवेचना ब्राक्स्मा [1] द्वारा की गयी है। ब्राक्स्मा (पृ० 439-241) द्वारा दी गयी परिभाषा के आधार पर इसे निम्नलिखित रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है :

$$H_{p,q}^{m,n}\left[Z \;\middle|\; \begin{matrix}\{(a_p, \alpha_p)\}\\ \{(b_q, \beta_q)\}\end{matrix}\right] = \int_T f(s)\, Z^s\, ds \tag{1.1}$$

जहाँ

$$f(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - \beta_j s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + \alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j + \beta_j s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - \alpha_j s)}$$

तथा $\{(a_p, \alpha_p)\}$ प्राचलों के समुच्चय $(a_1, \alpha_1), \ldots, (a_p, \alpha_p)$ को निरूपित करता है।

उपर्युक्त परिभाषा के आधार पर हमने H-फलन के लिए कुछ तत्समक स्थापित किये हैं। H-फलन के प्राचलों के विशिष्टीकरण से नये तत्समकों के साथ ज्ञात तत्समक विशिष्ट दशा के रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं।

प्रस्तुत शोध पत्र के परिणाम तभी सही हैं जब

$$\sum_{1}^{q} (\beta_j)-\sum_{1}^{q} (\alpha_j)\geqslant 0,$$

$$\sum_{1}^{n} (\alpha_j)-\sum_{n+1}^{p} (\alpha_j)+\sum_{1}^{m} (\beta_j)-\sum_{m+1}^{q} (\beta_j)\equiv\phi>0$$

तथा

$$|\arg Z|<\tfrac{1}{2}\phi\pi.$$

2. प्रथम सम्बंध

$$H_{p+2,\,q+1}^{m,\,n+2}\left[Z\,\middle|\,\begin{matrix}(1,\,h),\,(1-k,\,v),\,\{(a_p,\,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\,\beta_q)\},\,(2-k,\,v)\end{matrix}\right] \tag{2.1}$$

$$=(k-1)\,H_{p+1,\,q}^{m,\,n+1}\left[Z\,\middle|\,\begin{matrix}(1,\,h),\,\{(a_p,\,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\,\beta_q)\}\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{V}{hZ}\,H_{p+1,\,q}^{m,\,n+1}\left[Z\,\middle|\,\begin{matrix}(h,\,h),\,\{(a_p+\alpha_p,\,\alpha_p)\}\\ \{(b_q+\beta_q,\,\beta_q)\}\end{matrix}\right]$$

उपपत्ति

बांई ओर H-फलन को (1.1) की दृष्टि से अभिव्यक्त करके

$$\frac{\Gamma(k+vs)\,\Gamma(hs)}{\Gamma(k-1+vs)}=(k-1+vs)\,\Gamma(hs) \tag{2.2}$$

$$=(k-1)\,\Gamma(hs)+v/h\;\Gamma(1+hs)$$

के उपयोग से तथा दूसरे समाकल में s के स्थान पर $s-1$ रखने पर और पुनः (1.1) का उपयोग करने पर हमें दाहिना पक्ष प्राप्त होता है।

द्वितीय सम्बंध

$$H_{p+1,\,q}^{m+1,\,n+1}\left[Z\,\middle|\,\begin{matrix}(1,\,h),\,\{(a_p,\,\alpha_p)\},\,(k,\,v)\\ (k+1,\,v),\,\{(a_q,\,\beta_q)\}\end{matrix}\right] \tag{2.3}$$

$$=kH_{p+1,\,q}^{m,\,n+1}\left[Z\,\middle|\,\begin{matrix}(1,\,h),\,\{(a_p,\,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\,\beta_q)\}\end{matrix}\right]$$

$$-\frac{v}{hZ}\,H_{p+1,\,q}^{m,\,n+1}\left[Z\,\middle|\,\begin{matrix}(h,\,h),\,\{(a_p+\alpha_p,\,\alpha_p)\}\\ \{(b_q+\beta_q,\,\beta_q)\}\end{matrix}\right].$$

उपपत्ति

ऊपर लिखी विधि के अनुसार ही आगे बढ़ने पर तथा (2.2) के स्थान पर

$$\frac{\Gamma(hs)\,\Gamma(k+1-vs)}{\Gamma(k-vs)}=(k-vs)\,\Gamma(hs) \tag{2.4}$$

का उपयोग करने पर परिणाम सरलता से स्थापित किया जा सकता है ।

तृतीय सम्बंध

$$kH^{m,\,n+2}_{p+2,\,q+1}\left[Z\left|\begin{matrix}(1,h),\,1-k,\,\alpha),\,\{(a_p,\,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\,\beta_q)\},\,(-k,\,\alpha)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=H^{m,\,n+1}_{p+1,\,q}\left[Z\left|\begin{matrix}(1,h),\,\{(a_p,\,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$-\frac{\alpha}{hZ}\,H^{m,\,n+2}_{p+2,\,q+1}\left[Z\left|\begin{matrix}(h,\,h),\,(1+\alpha-k,\,h),\,\{(a_p+\alpha_p,\,\alpha_p)\}\\ \{(b_q+\beta_q,\,\beta_q)\},\,(\alpha-k,\,h)\end{matrix}\right.\right]. \tag{2.5}$$

उपपत्ति :

बाईं ओर H-फलन को (1.1) की दृष्टि से समोच्च समाकल (Contour Integral) अभिव्यक्त करके,

$$\frac{k\;\Gamma(hs)\,\Gamma(k+\alpha s)}{\Gamma(1+k+\alpha s)}=\frac{k}{(k+\alpha s)}\,\Gamma(hs)$$

$$=\left(1-\frac{\alpha s}{k+\alpha s}\right)\Gamma(hs)$$

$$=\Gamma(hs)-\frac{\alpha}{h}\cdot\frac{\Gamma(k+\alpha s)\,\Gamma(1+hs)}{\Gamma(1+k+\alpha s)}$$

के उपयोग करने तथा द्वितीय समाकल में s को $s-1$ से बदलने एवं पुनः H-फलन की परिभाषा (1.1) का उपयोग करने पर हमें दाहिना पक्ष प्राप्त होता है ।

चतुर्थ सम्बंध

$$kH^{m+1,\,n+1}_{p+2,\,q+1}\left[Z\left|\begin{matrix}(1,h),\,\{(a_p,\,\alpha_p)\},\,(1+k,\,\alpha)\\ (k,\,\alpha),\,\{(b_q,\,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right] \tag{2.6}$$

$$=H^{m,\,n+1}_{p+1,\,q}\left[Z\left|\begin{matrix}(1,h),\,\{(a_p,\,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$+\frac{\alpha}{hZ}\,H^{m+1,\,n+1}_{p+2,\,q+1}\left[Z\left|\begin{matrix}(h,\,h),\,\{(a_p+\alpha_p,\,\alpha_p)\},\,(1+\alpha+k,\,h)\\ (\alpha+k,\,h),\,\{(b_q+\beta_q,\,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]. \tag{2.7}$$

उपपत्ति :

उपर्युक्त विधि से आगे बढ़ने तथा (2.6) के स्थान पर

$$\frac{k\,\Gamma(hs)\,\Gamma(k-\alpha s)}{\Gamma(1+k-\alpha s)}=\frac{k}{k-\alpha s}\,\Gamma(hs) \tag{2.8}$$

$$=\left(1+\frac{\alpha s}{k-\alpha s}\right)\Gamma(hs)$$

$$=\Gamma(h)-\frac{\alpha}{h}\cdot\frac{\Gamma(1+hs)\,\Gamma(k-\alpha s)}{\Gamma(1+\alpha-ks)}$$

का उपयोग करने पर परिणाम आसानी से प्राप्त हो जाता है ।

पंचम सम्बंध

$$2l\,H^{m,\,n+4}_{p+4,\,q+2}\left[Z\left|\begin{matrix}(1,h),(1-l,h),(1-k,h),(-\tfrac{1}{2}k,h),\{a_p,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\beta_q)\},(1-\tfrac{1}{2}k,h),(l-k,h)\end{matrix}\right.\right] \tag{2.9}$$

$$=H^{m,\,n+3}_{p+3,\,q+1}\left[Z\left|\begin{matrix}(1,h),(-l,h),(-k,h),\{(a,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\beta_q)\},(l-k,h)\end{matrix}\right.\right]$$

$$-Z^{-1}\,H^{m,\,n+3}_{p+3,\,q+1}\left[Z\left|\begin{matrix}(h,h),(1+h-l,h),(1+h-k,h),\{a_p+\alpha_p,\alpha_p)\}\\ \{(b_q+\beta_q,\beta_q)\},(1+l+h-k,h)\end{matrix}\right.\right].$$

उपपत्ति :

बाईं ओर H-फलन का समोच्च-समाकल निरूपित करते हुए,

$$\frac{2l\,\Gamma(1+\tfrac{1}{2}k+hs)}{\Gamma(\tfrac{1}{2}k+hs)}=(lk+2lhs) \tag{2.10}$$

के उपयोग से तथा द्वितीय समाकल में s को $s-1$ से बदलने एवं H-फलन की परिभाषा का पुनः उपयोग करने पर हमें दाहिना पक्ष प्राप्त होता है ।

इन्हीं आधारों पर निम्नांकित परिणाम आसानी से स्थापित किया जा सकता है :

षष्ठम सम्बंध :

$$2l\,H^{m+3,\,n+1}_{p+3,\,q+3}\left[Z\left|\begin{matrix}(1,h),\{(a_p,\alpha_p)\},\tfrac{1}{2}k,h),(k-l+1,h)\\ (k,h),(\tfrac{1}{2}k+1,h),(l,h),\{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right] \tag{2.11}$$

$$=H^{m+2,\,n+1}_{p+2,\,q+2}\left[Z\left|\begin{matrix}(1,h),\{(a_p,\alpha_p)\},(1+k-l,h)\\ (k+1,h),(l+1,h),\{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$+Z^{-1}\,H^{m+2,\,n+1}_{p+2,\,q+2}\left[Z\left|\begin{matrix}\{h,h),\{(a_p+\alpha_p,\alpha_p)\},(h+k-l,h)\\ (k+h,h),(l+h,h),\{b_q+\beta_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right].$$

सप्तम सम्बंध

$$H^{m,n}_{p,q}\left[Z\left|\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right] \tag{2.12}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{i,-i}\frac{1}{i}\; e^{i\pi k}\, H^{m+1,\,n+1}_{p+1,\,q+1}\left[Ze^{-i\pi h}\left|\begin{matrix}(k,h),\{(a_p,\alpha_p)\}\\ (k,h),\{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]$$

उपपत्ति :

बाईं ओर H-फलन को समाकल के रूप में अभिव्यक्त करने पर तथा

$$\Gamma(k-hs)\,\Gamma(1-k+hs)=\frac{\pi}{\sin\pi(k-hs)}$$

$$\Rightarrow \Gamma(k-hs)\,\Gamma(1-k+hs)=\frac{2i\pi}{e^{i\pi(k-hs)}-e^{-i\pi(k-hs)}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\left[\Gamma(k-hs)\,\Gamma(1-k+hs)\,\{e^{i\pi(k-hs)}-e^{-i\pi(k-hs)}\}\right]=1$$

एंव H-फलन की परिभाषा (1.1) का उपयोग करने पर हमें दाहिना पक्ष प्राप्त हो जाता है ।

निर्देश

1. ब्राक्स्मा, बी० एल० जे०, **काम्पोज० मैथ०**, 1963, **15**, 239-341·
2. एर्डेल्यी इत्यादि, Higher Transcendental Functions. **भाग** I, **मैकग्राहिल**, **न्यूयार्क** 1953
3. फाक्स सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा**, 1961, **98**, 395-429
4. सिमरी, एम० ए०, Recurrence relation for G-function (**प्रकाशनाधीन**)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 3, July, 1976, Pages 273-276

फ्लेवेन-4-ऑल की त्रिविम समावयवता

एस० के० गुप्ता
रसायनशास्त्र विभाग, शासकीय महाविद्यालय, शुजालपुर
तथा
एम० एम० बोकाड़िया
विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—जनवरी 2, 1976]

सारांश

6-मेथिल 4′ मेथाक्सी फ्लेवेन-4 ऑल युग्म (4-α ऑल एवम् 4-β ऑल) का क्रोमिक अम्ल द्वारा ऑक्सीकरण के तुलनात्मक अध्ययन करने से फ्लेवेन 4-α ऑल के चतुर्थ हाइड्राक्सिल समूह का क्वासी एक्सियल स्थान प्रमाणित हुआ। सम्बन्धित ऐसीटाक्सी फ्लेवेन के जल अपघटन के तुलनात्मक अध्ययन द्वारा इस प्रमाण की पुष्टि की गई।

Abstract

Stereo-chemistry of flavan-4-ol. *By* S. K. Gupta, Government College, Shujalpur and M. M. Bokadia, Vikram University, Ujjain

Comparative oxidation of pair of 6-methyl 4-methoxy flavan 4α and β ol by chromic acid confirms a quasi-axial position for the fourth hydroxyl group in 4α ol. Comparative study of the hydrolysis of acetoxyflavans further confirmed the conclusion about the quasi-axial nature of the hydroxyl group in this isomer.

अवरक्त स्पेक्ट्रम, नाभिकीय-चुम्बकीय-अनुनाद स्पेक्ट्रम तथा विशिष्ट समावयव बनाने की विधि द्वारा फ्लेवेन के चतुर्थ हाइड्राक्सिल समूह के विन्यास का निर्धारण किया जा चुका है,[1–4] किन्तु रसायन गतिकी का उपयोग जो स्टेराइडों की समावयवता ज्ञात करने के लिए उपयोग में लाई गई है फ्लेवेन के चतुर्थ हाइड्राक्सिल समूह के विन्यास ज्ञात करने के लिये अभी तक नहीं किया गया है। प्रस्तुत शोध पत्र में इस उद्देश्य की पूर्ति हेतु किये गये कार्य का उल्लेख है।

प्रयोगात्मक

1. (अ) 2, 4 ट्रांस 6′ मेथिल 4 मेथाक्सी फ्लेवेन 4α ऑल के बनाने की विधि

6 मेथिल 4′ मेथाक्सी फ्लेवेन को निश्चित प्रक्रम व विधि से बनाया गया [5-6], प्राप्त फ्लेवेन को लेड टेट्रा ऐसीटेट से अभिकृत कराकर 6 मेथिल 4′ मेथाक्सी 4α ऑल (द्रवणांक 128-29°) प्राप्त किया।

(ब) 2 ,4 सिस 6 मेथिल 4′ मेथाक्सी फ्लेवेन 4β ऑल के बनाने की विधि

6 मेथिल 4′ मेथाक्सी फ्लेवेन 4β ऑल को मेथिल 4′ मेथाक्सी फ्लेवेनोन का सोडियम बोरोहाइ-ड्राइड द्वारा अपचयन कर सूच्याकार ठोस (द्रवणांक 140-41°) के रूप में प्राप्त किया।

2. क्रोमिक अम्ल द्वारा फ्लेवेन-4 ऑल युग्म का आक्सीकरण

तापस्थापी को उपयुक्त ताप पर व्यवस्थित कर उसमें फ्लेवेन 4 α तथा β ऑल के विलयन को अलग-अलग अभिकर्मक बोतलों में रखा। आवश्यक ताप पर आ जाने के पश्चात् विलयन की अभिकर्मक बोतलों में समान मात्रा में क्रोमिक अम्ल मिलाया और इसके बाद ही 2 मि०ली० प्रमाज पिपेट की सहायता से लेकर उसमें 5 मि०ली० 5 प्रतिशत सल्फ्यूरिक अम्ल तथा 5 मि०ली० 10 प्रतिशत पोटैशियम आयोडाइड विलयन मिलाकर तुरन्त ही सोडियम थायोसल्फेट से अनुमापन किया। इसी प्रकार समयान्तर के साथ भिन्न-भिन्न सांद्रणों एवं तापों पर दोनों समावयवों का अनुमापन कर अर्धसमय ज्ञात किये गये। प्राप्त परिणाम सारणी 1 में दर्शाये गये हैं।

सारणी 1

अ० क्र०	ताप	फ्लेवेन 4 ऑल का सान्द्रण	अर्धसमय मिनिटों में	
			α आल समावयव	β ऑल समावयव
1	35°C	$10 \times 10^{-4} M$	225	275
2	45°C	$10 \times 10^{-4} M$	375	550
3	35°C	$20 \times 10^{-4} M$	400	500
4	45°C	$20 \times 10^{-4} M$	285	500

सारणी 1 के परिणाम फ्लेवेन 4-α ऑल के तीव्रतर आक्सीकरण को दर्शाते हैं जो कि फ्लेवेन के चतुर्थ हाइड्राक्सिल समूह के क्वासी-एक्सियल स्थिति होने का स्पष्ट प्रमाण है।

· 6 मेथिल 4′ मेथाक्सी 4 ऐसीटाक्सी फ्लेवेन के बनाने की विधि

फ्लेवेन 4α एवम् β ऑल का पिरिडीन में ऐसीटिक ऐनहाइड्राइड द्वारा ऐसीटिलीकरण कर क्रमशः 4α ऐसीटाक्सी फ्लेवेन (द्रवणांक 110-12°) तथा 4β ऐसीटाक्सी फ्लेवेन (द्रवणांक 165°) प्राप्त किये गये।

सारणी 2

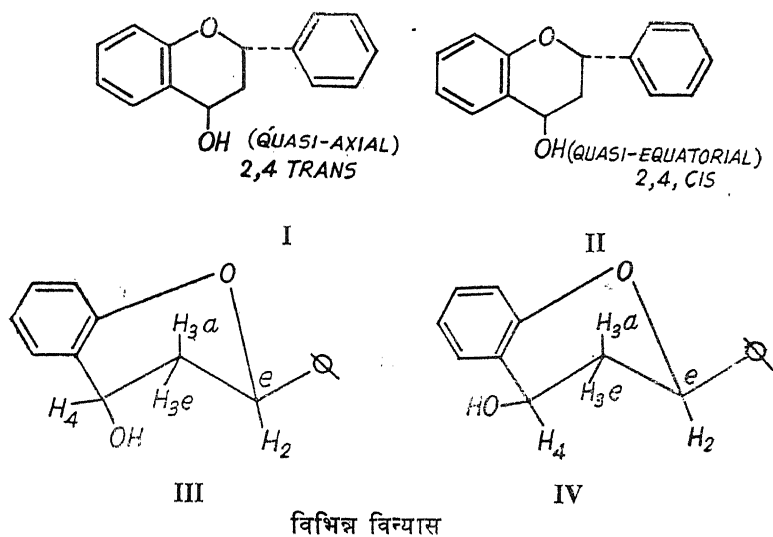
अ० क्र०	ताप	ऐसीटॉक्सी फ्लेवेन का सान्द्रण	अर्धसमय मिनिटों में	
			α समावयव	β समावयव
1	30°C	$40\times10^{-4}M$	150	130
2	40°C	$40\times10^{-4}M$	420	375
3	30°C	20×10^{-4}M	340	250
4	40°C	$20\times10^{-4}M$	300	275

4. 6 मेथिल 4′ मेथाक्सी ऐसीटाक्सी फ्लेवेन का जल अपघटन

तापस्थायी को उपयुक्त ताप पर व्यवस्थित हो जाने के बाद ऐसीटाक्सी फ्लेवेन के दोनों समावयवों को अलग-अलग अभिकर्मक बोतलों में लिया। विलयन के आवश्यक ताप आ जाने के पश्चात् उसमें लगभग समान सान्द्रण का 20 मि०ली० सोडियम हाइड्राक्साइड विलयन मिलाया गया। तुरन्त ही पिपेट से 2 मि०ली० प्रमाज लेकर उसमें समान सांद्रण का 2 मि०ली० सल्फ्यूरिक अम्ल मिलाकर अनभिकृत अम्ल का सोडियम हाइड्राक्साइड से अनुमापन किया गय। ।समयान्तर के साथ विभिन्न तापों व सांद्रणों पर किये गये जल अपघटन के अर्धसमय के परिणाम सारणी 2 में दर्शाये गये हैं।

I II

III IV

विभिन्न विन्यास

सारणी 2 के परिणाम (4α ऐसीटाक्सी फ्लेवेन का मन्दतर जल अपघटन) 4α ऑल के क्वासी-एक्सियल विन्यास को पुनः पुष्ट करता है। β समावयव में इसका विन्यास क्वासी-इक्वेटोरियल निर्धारित होता है।

इस प्रकार α ऑल व β ऑल का विन्यास क्रमशः 2, 4 ट्रांस तथा 2, 4 सिस होने की पुष्टि हुई। 4α ऑल (I) तथा 4β ऑल (II) को क्रमशः अर्धकुर्सी कन्फर्मेशन (III) तथा (IV) द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

एक लेखक (एस० के० गुप्ता) विश्वविद्यालय अनुदान आयोग, नई दिल्ली का शोध छात्रवृति प्रदान करने हेतु आभारी है।

निर्देश

1. लिल्लाया, केह्रो, फिलबीन, विकेरस तथा व्हीलर, **केमिस्ट्री एण्ड इण्डस्ट्री** 1963, 84.
2. वर्मा तथा बोकाड़िया, **करेन्ट साइन्स** 1964, 33, 648.
3. वर्मा तथा बोकाड़िया, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०** 1966, 43, 91.
4. बोकाड़िया, ब्राउन, कोलकर, लवे, न्यूबोल्ड, सोमरफील्ड तथा वुड, 1957, 79, 1005.
5. वर्मा तथा बोकाड़िया, **केमिस्ट्री एण्ड इण्डस्ट्री**, 1964, 235.
6. वर्मा तथा बोकाड़िया, **केमिस्ट्री एण्ड इण्डस्ट्री** 1964, 807.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 3, July, 1976, Pages 277-293

योग-शास्त्र में तंत्रिका तंत्र का तथाकथित 'रहस्यमय' वर्णन

भुवनचन्द्र जोशी

एनस्थलॉजी विभाग, मेडिकल कालेज, झाँसी

[प्राप्त—जून 28, 1976]

सारांश

पुरातन योग-ग्रन्थों में मानव तन्त्रिका तन्त्र के उत्कृष्ट वर्णन मिलते हैं, जिनके बोधगम्य न हो पाने से आधुनिक विज्ञानवेत्ताओं को भारी गलतफहमी है। इस विषय का यथातथ्य चित्रण आधुनिक विज्ञान की भाषा में करना, इस शोध-प्रबन्ध का उद्देश्य है।

इस प्रबन्ध में 'षट्चक्र निरूपण' ग्रन्थ के कुछ अंशों का लेखक ने अपनी व्याख्या सहित अनुवाद किया है, जिससे यह सिद्ध हुआ कि इसमें प्राप्य निम्नलिखित वर्णन वैज्ञानिक दृष्टि से सत्य हैं :—

1. केन्द्रीय तन्त्रिका अक्ष (सुषुम्ना) की आकृति, मस्तिष्क में निलयों की स्थिति, मस्तिष्क-मेरु-तरल की उपस्थिति तथा उसके स्राव का स्रोत।

2. केन्द्रीय तन्त्रिका अक्ष की सूक्ष्म संरचना, अर्थात् श्वेत-स्तम्भ, उसके अन्दर तीन शृंगों वाला धूसर-स्तम्भ और केन्द्रीय नलिका। तन्त्रिका कोशाओं की मकड़ी के जाले के अनुरूप परस्पर की संचार-प्रणाली।

3. अनुकम्पी एवं परानुकम्पी तन्त्रिका तन्त्रों की पृथक पहचान तथा उनका सुषुम्ना के साथ सतत संचार।

इस प्रकार यह स्पष्ट हुआ कि योगशास्त्र का तन्त्रिका विज्ञान प्रवृद्ध एवं समुन्नत है तथा प्रचुर अंशों में आधुनिक वैज्ञानिक जानकारी से मेल खाता है। इसे गहन अध्ययन किये बिना तथा सही दृष्टि-कोण से परखे बिना 'रहस्यात्मक' कहना अनुचित है।

पाश्चात्य विज्ञानशास्त्री ग्रीक सभ्यता के स्कूलों से ही वैज्ञानिक चिन्तन का आरम्भ मानते हैं। परन्तु योगसाधना की परिपाटी उससे कहीं अधिक प्राचीन है। अतएव विज्ञान के इतिहास में इस विद्या को उसका उचित स्थान मिलना चाहिये।

Abstract

The 'mystical neuro-anatomy' of Yoga. *By* B. C. Joshi, Department of Anaesthesiology, Medical College, Jhansi

Ancient Yogic treatises contain descriptions of human neurology which have been much misunderstood by modern scientists. This paper aims to project the correct picture in the right perspective.

Three verses of Sat-cakra Nirupana have been translated by the author with comments. It is found that they correctly portray the following :—

(1) The morphology of the central neural axis, location of the ventricles in the brain, presence of cerebro-spinal fluid and the source of its secretion.

(2) The salient histological features of the neural axis i. e. a horned grey coloumn within a white coloumn, the central canal and the spider-web like network of inter-neuronal communication.

(3) The separate identity of the autonomic system and its constant communication with the spinal cord.

Thus, it is found that Yogic anatomy is highly advanced and conforms to the most modern scientific knowledge. It does not deserve to be called 'Mystical' without being studied in depth and with the right perspective.

Yogic anatomy antedates the classical Greek schools and should be accorded its proper place in medical history.

प्रस्तावना

हमें बताया जाता है कि यूनानियों के पूर्व की विश्व की सभी प्राचीन सभ्यताएँ मानव तन्त्रिका-तन्त्र के बारे में कोई ज्ञान नहीं रखतीं थीं, यहाँ तक कि शवविच्छेद भी किसी को ज्ञात नहीं था [5]। चिकित्सा-विद्या को वैज्ञानिक आधार देने का तथा शरीर रचना एवं क्रिया विज्ञानों के मूल सिद्धान्तों की स्थापना का सम्पूर्ण श्रेय प्राचीन यूनानियों को दिया जाता है। प्राचीन भारतीय इतिहास के अनुशीलन से प्रकट होता है कि सत्य इससे भिन्न है।

हठयोग एवं कुण्डलिनी योग के अनेक प्राचीन ग्रन्थों में तथा महाभारत में भी अनेक वर्णन हैं, जिनसे मानव तन्त्रिका तन्त्र की स्थूल आकृति, सूक्ष्म संरचना तथा क्रिया का ऐसा स्पष्ट ज्ञान मिलता है जो आधुनिक तांत्रिकी विज्ञान (न्यूरालॉजी) से किसी भाँति पीछे नहीं है। प्रस्तुत प्रबन्ध का उद्देश्य यही सिद्ध करना है।

इस बात के प्रचुर प्रमाण विद्यमान हैं कि यूनानियों द्वारा अलक्षेन्द्रियन स्कूल की स्थापना (300

ई० पू०) के बहुत पहले से भारतीयों को इस योगविद्या का ज्ञान था, तथा यह स्कूल अपने आरम्भिक काल में योगदर्शन के प्रभाव से पनपा था [4,8] मानव शरीर रचना के प्रत्यक्ष तथ्यों से नितान्त अपरिचित कुछ विद्वानों ने योगशास्त्र के मूल संस्कृत ग्रन्थों का मनमाना अनुवाद किया, जिससे घोर भ्रान्ति फैली हुई है। [6, 1, 9] यही कारण है कि आज योगशास्त्र के उत्कृष्ट तांत्रिकी विज्ञान को 'रहस्यमय विज्ञान' की उपाधि दी जा रही है। लेखक ने उचित परिप्रेक्ष्य में इन श्लोकों के अक्षरक्षः अनुवाद का प्रयत्न किया है जिससे ज्ञात हुआ कि यह योगशास्त्र की एक उत्कृष्ट वैज्ञानिक उपलब्धि है तथा इसमें 'रहस्यमय' कहलाने के योग्य कुछ भी नहीं है।

उपलब्ध साहित्य का पर्यवेक्षण

तन्त्रिका तन्त्र की रचना तथा क्रिया के ये वर्णन योगविद्या तथा तन्त्रशास्त्र के अनेक ग्रन्थों में उपलब्ध हैं, जिनमें से कुछ वैदिककालीन [1] कुछ बुद्धकालीन तथा कुछ मध्ययुगीन भारतीय इतिहास से सम्बद्ध हैं। [11, 12] इतने विभिन्न ग्रन्थों के वर्णन अधिकांश में समानता लिये हुए हैं, कुछ एक दूसरे के पूरक भी हैं परन्तु कदाचित कहीं भी एक दूसरे के विपरीत जाते हुए पाये नहीं गये हैं। इससे इस विद्या के सुदृढ़ आधार का प्रमाण मिलता है।

ये ग्रन्थ शरीर रचना और क्रिया का मात्र वैसा ही और उतना ही वर्णन करते हैं जैसा कि योग साधना के लिये उपयुक्त है। सबसे विशद वर्णन षटचक्र निरूपण में पाया गया है, जिसे कि 16 वीं शती ईसवी में योगी पूर्णानन्द स्वामी ने लिखा था जिसकी मूल हस्त प्रतिलिपि कलकत्ता के एक पुस्तकालय में संग्रहीत है।

भारत में मुस्लिम तथा ब्रिटिश आक्रमणों के साथ साथ योग एवं तन्त्र विद्याओं तथा इनके साहित्य का लोप होता रहा। बीसवीं सदी के आरम्भ से कुछ देशी राज्यों ने तथा कुछ जन संस्थाओं ने लुप्तप्राय प्राचीन ग्रन्थों को प्रकाशित करने का सद्प्रयत्न किया।

सर जान वुडरूफ ने 'आर्थर एवलॉन' उपनाम से 'तांत्रिक ग्रन्थ माला' का प्रकाशन किया। उन्होंने हिन्दू, बौद्ध तथा जैन दर्शनों में एकत्व सिद्ध करके उसे "भारतीय दर्शन" की संज्ञा दी है, तथा अनेक पुस्तकें लिखकर इस भारतीय दर्शन को तथा तन्त्र शास्त्र के रहस्य को सफलतापूर्वक समझाया। उन्होंने संस्कृत टीकाओं की सहायता से 'षटचक्र निरूपण' का अंग्रेजी में अनुवाद 'सर्पेन्ट पावर' के नाम से लिखकर प्रकाशित कराया। इस अनुवाद में कतिपय गहरी त्रुटियाँ प्रवेश पा गई हैं, जिन्हें मैं अन्यत्र सिद्ध करूंगा।

इस ग्रन्थ के प्रायः सभी श्लोकों का अक्षरशः साम्य आधुनिक तांत्रिकी (न्यूरालाजी) के साथ बैठता है। इस महत्वपूर्ण तथ्य को भी वुडरूफ नहीं समझ पाये।

इस साम्य को सिद्ध करना ही प्रस्तुत शोध प्रबन्ध का मुख्य उद्देश्य है।

योग शास्त्र की तांत्रिकी पर अन्य भी बहुतेरे आधुनिक लेखकों ने लिखा है परन्तु मूल संस्कृत

ग्रन्थों का अध्ययन न करके ये सभी वुडरूफ के अंग्रेजी अनुवाद पर पूर्णरूपेण निर्भर करते हैं, जिससे उसकी त्रुटियों को दुहराते मात्र रहते हैं। अतः साहित्य को इनकी देन नगण्य है।

षड्दर्शन का अंग होने के कारण योगशास्त्र की तांत्रिकी (न्यूरालॉजी) बहुसंख्यक प्राचीन ग्रन्थों में यत्र तत्र वर्णित है। आधुनिक शोधकर्ताओं में से विरले ही किसी विद्वान ने इस विशाल निधि पर दृष्टिपात किया होगा। अपवादस्वरूप कुछ लोग हैं जो इस तथाकथित 'रहस्य' को सुलझाने के लिए सही तरीके से प्रयत्नशील हैं। [1]

केन्द्रीय तंत्रिका अक्ष (सुषुम्ना)

अब मैं 'षटचक्र निरूपण' ग्रन्थ के तीन श्लोकों का अक्षरशः अनुवाद करके उसके आधार पर अपनी व्याख्या दूंगा।

श्लोक-प्रथम

"मेरोर्वाह्य प्रदेशे शशि मिहिर शिरे सव्यदक्षे निषण्णे।"

मेरुदण्ड के बाहरी क्षेत्र में बांयी और दाहिनी तरफ चन्द्ररूप एवं सूर्यरूप सिर वाली दो (नाडियां) मौजूद हैं।

"मध्ये नाडी सुषुम्ना त्रितयगुणमयी सूर्य चन्द्राग्निरूपा।"

(मेरु के) अन्दर सुषुम्ना नाडी है जो तीन प्रकार की गुण युक्त, सूर्य, चन्द्र तथा अग्नि-स्वरूपा है।

"धुस्तुरस्मेर पुष्प प्रथिततमवपुः कन्दमध्याच्छिरस्था।"

पूर्ण रूप से खिले हुए धतूरे के फूल के समान आकृति वाली (सुषुम्ना नाडी) कन्द के मध्य से (आरम्भ हो कर) शिर के अन्दर तक स्थित है।

"वज्राख्या मेढ्देशाच्छिरसि परिगता मध्यमेस्याज्ज्वलन्ती ॥२॥

इस नाडी (सुषुम्ना) के अन्दर दहकती हुई वज्रा है। शिश्न मूल की सतह से (आरम्भ होकर) सिर के अन्दर तक चली गई है।

श्लोक-द्वितीय

"तन्मध्ये चित्रिणी सा प्रणव विलसिता योगिनां योग्यगम्या।"

उस (वज्रा) के मध्य में चित्रिणी है जो ॐ के स्वरूप से विभूपित है, तथा योगी जिसको (ध्यान) योग के द्वारा जान सकते हैं।

"लूता तन्तूपमेया सकलसरसिजान् मेरुमध्यान्तरस्थान्।
भित्वा देदीप्यते तद्ग्रथनरचनया शुद्धबोध प्रबोधा।"

मकड़ी के जाले सदृश (सूक्ष्म संरचना वाली) (चित्रिणी) मेरु के मध्य में अन्तर से स्थित सभी कमलों (चक्रों) को भेदन करती हुई दीपज्वाला सी दमकती है।

(अपनी) उस बुनावट वाली सूक्ष्म संरचना के कारण (यह चित्रिणी) बुद्धि को शुद्ध ज्ञान की जानकारी देती है।

"तन्मध्ये ब्रह्मनाडी हरमुख कुहरादादि देवान्त संस्था ।।३।।"

श्लोक-तृतीय

विद्युन्मालाविलासा मुनिमनसि लसत्तन्तुरूपासुसूक्ष्मा ।
ब्रह्मद्वारं तदास्ये प्रविलसति सुधाधारगम्य प्रदेशं ।।

उस (चित्रिणी) के बीच में, मूलाधार से सहस्रार तक गई हुई, विद्युत की मालायें पहने हुए, धागे सदृश आकृति वाली, अति बारीक ब्रह्मनाड़ी है जिससे मुख पर सुधा की धारा से रमणीक, सृष्टि रचियता का दरवाजा है।

व्याख्या

1. इस बात पर आधुनिक विद्वान प्रायः एकमत हैं, कि यह वर्णन बांयीं तथा दाहिनी अनुकम्पी शृंखलाओं का संकेतक है, जिन्हें इडा और पिंगला नाडी कहा जाता है। [I]

यहां शिरा शब्द को नाडी का अर्थ संज्ञक लेना अनुचित है। शशिशिरा का अर्थ है चन्द्ररूप सिर वाली। शशिरूप शिरः यस्या सा। इसी प्रकार मिहिरशिरा। अनुकम्पी शृंखलाओं की गंडिकायें ही उनके सिर हैं। इन गंडिकाओं से शरीर में प्राण (तंत्रिका आवेग) प्रवाहित होता है, अतः इनको चन्द्र सूर्य की उपमा देना उचित है; जो कि विश्व में प्राण के स्रोत हैं।[II]

रूद्रयामल के अनुसार इडा, पिंगला ये दोनों सुषुम्ना के साथ वेणीबन्ध के क्रम से गुंथी हुई हैं तथा उसके अन्दर प्रत्येक चक्र से संचार करती हैं।[III]

षट्चक्रविवृति के अनुसार इडा, पिंगला बायीं और दाहिनी जत्रु अस्थि के पीछे स्थित हो कर दोनों तरफ से हृदय को तंत्रिका-सम्भरण देती हैं। [IV]

उपर्युक्त दोनों तथ्यों को आधुनिक अनाटमी सत्यापित करती है।

2. प्रायः लेखक मेरुरज्जु को ही पूरी सुषुम्ना का पर्याय मानने की गलती करते आये हैं।[10]

योग में वर्णित तंत्रिका तंत्र की रचना के बारे में चतुर्दिक भ्रम फैलाने में इस अकेली गलती का ही हाथ सबसे अधिक है।

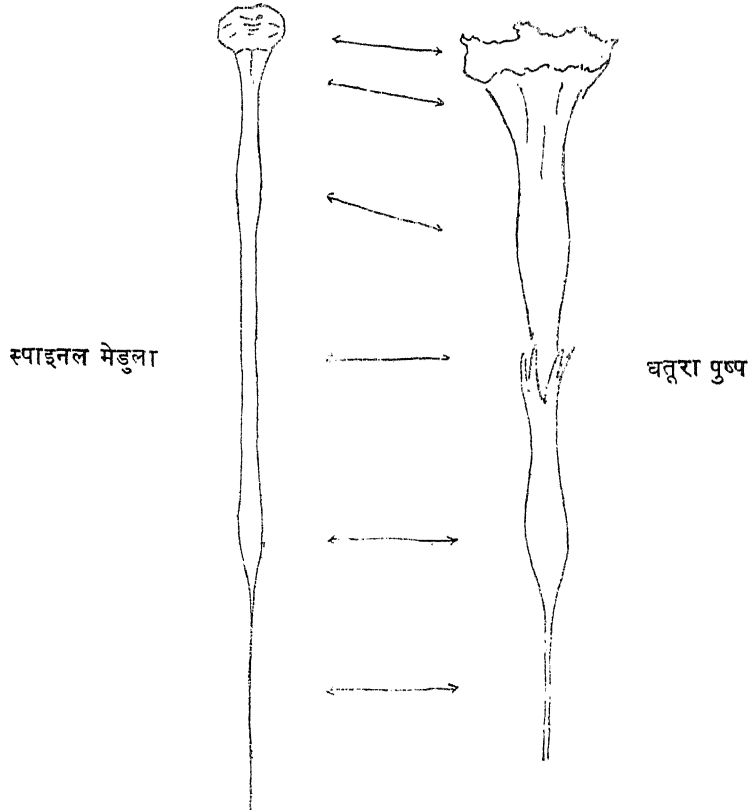
इस श्लोक से सुषुम्ना की स्पष्ट परिभाषा मिल रही है, कि यह कन्द [V] (त्रिकगुहा के निम्नतम भाग) से सिर के अन्दर तक गई है। [16'9]

विभिन्न योग ग्रन्थों में काफी प्रमाण मिलते हैं जिनसे सिद्ध होता है कि **मिडब्रेन** तथा **मेडुला अबलांगगेटा** ही सुषुम्ना का मूल (ऊपरी भाग) बनाते हैं। [VI] सर्वोत्तम वर्णन जो 'भूतशुद्धि' में प्राप्त है, वह इस प्रकार है :

"सुषुम्ना चव्या की बेल के समान मेरु में चिपकी हुई फिर उससे आगे को जाती है। ग्रीवा के ऊपरी छोर पर पहुँच कर यह आगे को तिरछी हो जाती है पश्चात् शंखिनी की नाल (ट्रैक्ट) के सहारे सहस्रार चक्र में पहुँचती है"।[VII]

यह बात ध्यान योग्य है कि सुषुम्ना के ऊपरी छोर को 'मूल' तथा निचले छोर को आस्थ (मुंह) की संज्ञा दी गई है (शिव संहिता 5/120)।

सुषुम्ना का निचला छोर

हम नीचे सिद्ध करेंगे कि सुषुम्ना की रचना वज्रा, चित्रिणी और ब्रह्मनाडी के मिलने से होती है जो कि आधुनिक अनाटमी के White Column, Grey Column तथा Central Canal हैं।

चित्र 1. Diagram of spinal medulla (Gray's Anatomy 1958)
compared to a Dhattura Flower (drawn from actual)

वज्रा, ब्रह्मनाडी तथा सुषुम्ना इन तीनों के त्रिकगुहा के निम्नतम भाग से आरम्भ होने का स्पष्ट उल्लेख षट्चक्रनिरूपण में मिलता है। परन्तु चित्रिणी के स्थान का उल्लेख नहीं मिलता। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि आरम्भ में सुषुम्ना का निचला छोर केवल वज्रा और ब्रह्मनाडी से ही मिलकर बनता है जो कि वहां पर Cauda Equina तथा Filum Terminale के रूप में मौजूद हैं। चित्रिणी (Grey Column) इसमें ऊपर चलकर सम्मिलित होती है।

उपर्युक्त विवेचना से ज्ञात हुआ कि Cauda Equina से लेकर Mid-brain तक सम्पूर्ण तंत्रिका अक्ष का नाम ही सुषुम्ना है; जिसका एक भाग मेरु के अन्दर तथा दूसरा भाग शिर के अन्दर है।[IX]

आधुनिक अनाटमी ने कृत्रिम विभाजन से जिस 'मेरु रज्जु' (Spinal Cord) नाम की उत्पत्ति की है उसे योगशास्त्र मान्यता नहीं देता, तथा यह शब्द सुषुम्ना का पर्यायवाची नहीं है।

इस प्रकार परिभाषा होने पर सुषुम्ना की स्थूल आकृति पूरे खिले हुए धतूरे के फूल से हूबहू, बारीकी से मेल खाती है जैसा कि चित्र 1 में दिखाया गया है। यह उपमा आश्चर्यजनक रूप से सही उतरती है।

वुड्रूफ (1958) ने यहां पर अनुवाद किया है—"धतूरे के फूलों की माला जैसी आकृति सुषुम्ना की है।" यह गलत है। सुषुम्ना केवल एक ही धतूरा पुष्प जैसी है। 'प्रथिततम' की जगह पर 'ग्रथिततम का गलत पाठान्तर करने से यह त्रुटि हुई है।

सुषुम्ना सूर्य, चन्द्र तथा अग्निरूपा है

सूर्य, चन्द्र और अग्नि ये ही विश्व में शक्ति (प्राण) के प्राकृतिक स्रोत हैं। हमारे शरीर में प्राण शक्ति सुषुम्ना से निरन्तर प्रवाहित होती हैं तथा यह (सुषुम्ना) चन्द्र-सूर्य रूप अनुकम्पी गंडिकाओं से निरतंर संचार से तदात्म होकर रहती है। योगशिखोपनिषत् से इसकी पुष्टि होती है।[X]

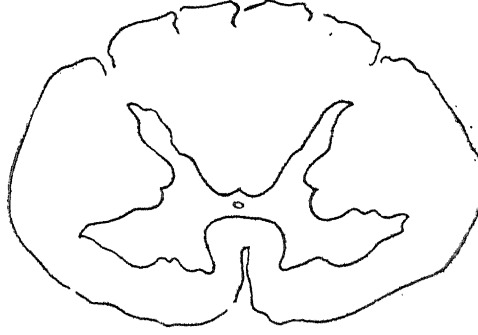
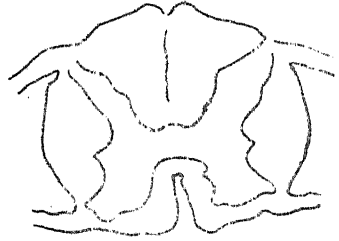
3-4 : अब मैं सिद्ध करूंगा कि वज्रा और चित्रिणी का वास्तविक शब्दार्थ White Colunm तथा Grey Column ही है।

प्राय: आधुनिक विद्वान इन्हें 'नाडी' संज्ञा से संकेत करते हैं। षटचक्र निरूपण में इनको नाडी नहीं कहा गया है, न ही नाडी चक्र की 14 नाडियों में इनकी गिनती किसी ग्रन्थ में पाई गई। [XI] ये सुषुम्ना के अन्दर केवल स्तम्भ के रूप में विद्यमान हैं।

वज्र हड्डी से बना शस्त्र है अत: वज्रश्वेत कहने से गौरवर्ण का ज्ञान होता है। यहां पर भी वज्रा का अर्थ गौरवर्णा है। इस बात का पुष्ट प्रमाण त्रिपुरासारसमुच्चय से मिलता है जिसमें वज्रा की "हार नीहार गौरी" का विशेषण दिया गया है। [XII]

'चित्रं किर्मीर कल्माष शबलैताश्च कर्बुरे।'

अमरकोश के इस आदेश से चित्र का अर्थ कबरा रंग होता है। कालिदास इसको कपोतवर्ण कहते हैं। [XIV]

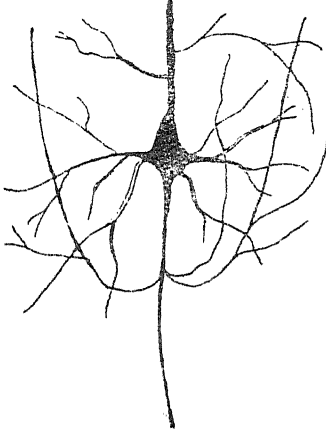
इस प्रकार शब्दार्थ लेने से स्पष्ट हुआ कि सुषुम्ना (केन्द्रीय तंत्रिका अक्ष) का बाहरी स्तम्भ श्वेत वर्ण ऊतक से बना है जिसके अन्दर कबरे रंग के ऊतक वाला दूसरा स्तम्भ है। आधुनिक अनाटमी इस तथ्य की सत्यापित करती है (चित्र 2.)

चित्र 2. Diagrams of transverse sections of (a) Cervical and (b) Lumbar spinal cord (from Gray's Anatomy 1973), The three horned shape of Om is seen on three faces of the grey column.

4. चित्रिणी को प्रणवविलासिता कहा गया है अर्थात् यह ॐ की आकृति से भूषित है।

मेरु रज्जु के अनुप्रस्थ काट (T.S.) के चित्रों में ग्रे कालम के अग्र, पश्च तथा मध्य शृंगों द्वारा ॐ की आकृति हूबहू प्रत्यक्ष होती है (चित्र 2)।

यह ध्यानयोग्य है कि इस सम्पूर्ण वर्णन में चित्रिणी कहां से आरम्भ होती है, यह निर्देश नहीं मिलता।

5. इस श्लोकार्ध में चित्रिणी (ग्रे कालम) की ऊतकी संरचना को समझाने के लिये मकडी के जाले का उदाहरण देकर बताया है, कि इस प्रकार की ऊतकी बुनावट के कारण ही चित्रिणी शुद्ध सूचनायें मष्तिक को ज्ञान कराती है।

न्यूरालाजी के अनुसार, ग्रे कालम अगणित तंत्रिका कोशाओं से मिलकर बनता है, जो कि सभी दिशाओं में अपने प्रवर्द्ध फैलाकर आपसी संचार के लिये मकडी के जाले जैसी क्लिष्ट रचना करते हैं। यह निस्सन्देह सत्य है, कि इस जाले वाली बुनावट की उत्तम संचार व्यवस्था के कारण ही शरीर के अंगों से प्राप्त सूचना विशुद्ध रूप में मस्तिष्क तक पहुंचती है (चित्र 3)।

चित्र 3. A spider like nerve-cell. Many cells connect up to make complex spider web network of interneuronal communica tion. (मकड़ी के जाले जैसी आकृति)

चित्र 4. Sagittal section through brain.stem (Gray's Anatomy 1958). The fourth ventricle forms a triangle abovə which is the half·moon spaped choroid pleseus.

'देदीप्यते' शब्द महत्वपूर्ण है। तंत्रिका आवेग (Nerve impulses) विद्युतमय होते हैं, यह बात वैज्ञानिकों को कुछ दशाब्दी पूर्व ज्ञात हुई है। चित्रिणी में ये आवेग (प्राण) सदा प्रवाहित होते रहते हैं। इस सतत विद्युतप्रवाह के कारण वह दीप्तिमती तथा जीवन्त है, यही निर्देश हमारा पुरातन योगशास्त्र करता है।

यहां चित्रिणी को मेरु नलिका के अन्दर स्थित सभी चक्रों का भेदन करने वाली कहा गया है। सुषुम्ना में विभिन्न सतहों पर छः चक्रों की स्थिति वर्णित है। किन्हीं ग्रंथों में सातवें तालुचक्र का भी वर्णन है [XV]।

ये चक्र सुषुम्ना में स्थित तंत्रिका स्टेशन हैं, जो अपने निर्दिष्ट कार्यों को निभाते हैं।

कुछ विद्वानों की यह मान्यता, कि षट्चक्र मेरुदंड के बाहर हैं[3] के स्पष्ट निर्देश से निराधार सिद्ध होती है।

6. यहां पर ब्रह्मनाडी को चित्रिणी के अन्दर स्थित बारीक धागे की आकृति वाली बताया है जिसमें सुधा की धारा का प्रवाह होता है तथा जिसके चारों ओर विद्यत आवेगों की मालायें हैं। यह

वर्णन इतना स्पष्ट है कि इसका Central Canal होना स्वतः सिद्ध है। सुधा की धारा का प्रवाह होने के कारण इसको नाडी कहना उचित है।

नड्गती धातोर्नाड्यते गम्येतऽ नया इति नाडी। इस परिभाषा से नाडी शब्द धमनी तथा तंत्रिका दोनों पर लागू होता है क्योंकि विद्युत्प्रवाह तथा द्रव प्रवाह का भौतिक नियम एक ही है।

मस्तिष्क के वेन्ट्रिकल तथा मस्तिष्क मेरु तरल

चौथा वेन्ट्रिकल : शिव संहिता में तालु की सतह पर सुषुम्ना के मूल में एक विवर के होने का उल्लेख है।[VI]

षट्चक्र निरूपण (श्लोक 35) में चौथे वेन्ट्रिकल कोरोइड प्लक्सस तथा मस्तिष्क मेरु तरल का बड़ा ही जीवन्त वर्णन इस प्रकार है—

"उस त्रिकोण के ऊपर एक अर्धचन्द्र स्थित है, जिसमें से निर्मल जल के समान धवल सुधा की धारा पैदा होकर उसी (अर्ध चन्द्र) के ऊपर बहती रहती है।"[XVI]

सौभाग्य लक्ष्मी उपनिषद् से इसकी पुष्टि होती है [XV] वुडरूफ ने इस श्लोक में 'जल धवल' की जगह पर 'बलधवल' गलत पाठान्तर किया है।

तीसरा वेन्ट्रिकल तथा पार्श्व वेन्ट्रिकल्स

इन तीनों वेन्ट्रिकल्स को एक ही शून्य अवकाश मान कर वर्णन किया गया है।

षट्चक्र निरूपण (श्लोक 40-43) में निम्न वर्णन मिलता है—

"उस (आज्ञा) चक्र के ऊपर पूर्ण चन्द्रमा के समान दीप्तिमान सहस्रार चक्र है। इसके अभ्यन्तर में चारों ओर से बिल्कुल छिपे हुए स्थान में एक त्रिकोण आकृति का शून्य अवकाश है, जो कि विद्युत आवेगों से निरन्तर प्रकाशित रहता है। इस शून्य अवकाश में सुधा की धारा अतिशय मात्रा में निरन्तर विमोचित होती रहती है।"[XVII]

इस प्रकार थोड़े ही शब्दों में हमको वेन्ट्रिकल्स, मस्तिष्क-मेरु-तरल तथा उसके स्रावक स्रोत का सही सही और सम्पूर्ण चित्रण मिलता है। "सर्पेन्ट पावर" में इन श्लोकों का अनुवाद भी ठीक ही किया गया है तो भी आश्चर्य है कि वुडरूफ आदि लेखक इतने स्पष्ट वर्णनों की संगति न्यूरालाजी से नहीं बैठा पाये।

विवेचना

प्रस्तुत प्रपत्र में योगशास्त्र में वर्णित तांत्रिकी के केवल भूमिकास्वरूप आरम्भिक अंश को ही सही अर्थ में समझने का प्रयत्न किया गया है। उसके प्रधान विषय, षट्चक्रों की चर्चा यहाँ नहीं की है।

इस गवेषण से ज्ञात हुआ, कि योगशास्त्र में निम्न तथ्यों का विज्ञानसम्मत वर्णन उपलब्ध है :

1. केन्द्रीय तंत्रिका अक्ष की आकृति, वेन्ट्रिकल्स की उपस्थिति एवं स्थिति, मस्तिष्क मेरु तरल की उपस्थिति तथा उसके स्रावक स्रोत का पता।

2. केन्द्रीय तन्त्रिका अक्ष की सूक्ष्म रचना (अर्थात् व्हाइट कालम के अन्दर तीन शृंगों वाला ग्रे कालम, उसके अन्दर सेन्ट्रल कैनाल) तथा तन्त्रिका कोशाओं की मकड़ी के जाले के समान रचना वाली आपसी संचार व्यवस्था।

3. मस्तिष्क से उद्गम होने वाले विद्युत आवेगों के निरन्तर प्रवाह से दीप्तिमान और जीवित अंग के रूप में सुषुम्ना की कल्पना।

4. मेरु दंड के बाहरी प्रदेश में स्थित अनुकम्पी शृंखलायें तथा उनका मेरुरज्जु के प्रत्येक खंड (Spinal segment) से संचार।

योगशास्त्र में 'सुषुम्ना' शब्द सम्पूर्ण केन्द्रीय तन्त्रिका अक्ष का संज्ञक है। पाश्चात्य अनाटमी ने उसे मिड-ब्रेन से लेकर कौडा इक्वाइना तक अनेक कृत्रिम खंडों में विभक्त कर रखा है। इस कृत्रिम विभाजन से योग साधना में कोई लाभ नहीं है अतः योगशास्त्र में वैसा उल्लेख नहीं है। दृढ़तानिका (ड्यूरा) आदि का भी कोई वर्णन योग में नहीं मिलता, उसका भी यही कारण है।

योग-साहित्य में अनाटमी की सार्थकता

योगशास्त्र किसी विद्योचित जिज्ञासा की पूर्ति या विज्ञान की उन्नति के हेतु अनाटमी का वर्णन नहीं करता। न यह विकृति विज्ञान अथवा चिकित्सा विज्ञान के रहस्यों को सुलझाने के उद्देश्य से अनाटमी बताता है। यह शरीर रचना के केवल उन विशेष स्थलों को संक्षेप में प्रकाशित करता हैं जिनसे साधकों को योग के उद्देश्यों की प्राप्ति में सहायता मिलती है।

इस प्रकार के सही दृष्टिकोण के बिना योग साहित्य की अनाटमी भ्रमपूर्ण ही दिखाई देगी।

क्या योगशास्त्र की अनाटमी रहस्यात्मक है ?

बलदेव सिंह तथा छीना (1974) लिखते हैं, कि "चक्रों और नाडियों की धारणा को शरीर के अंगों तथा उनके कार्यों से तुलना के कुछ प्रयत्न किये गये हैं। परन्तु योग में वर्णित चक्रों के गुण विशेषों का इन प्रस्तावित अंगों के कार्यों से कोई तालमेल बैठाया नहीं जा सकता।"

यह वर्णन अपनी जगह पर सत्य है। पर इसके कारण को इन लेखकों ने नहीं बताया कि योग पर लिखने वाले आधुनिक विद्वान एकमात्र 'सर्पेन्ट पावर' पुस्तक पर ही पूर्णरूप से निर्भर रहते आये हैं। वे षट्चक्र निरूपण या अन्य उपलभ्य योग ग्रन्थों को मूल संस्कृत में अध्ययन नहीं करते या कर नहीं ही सकते हैं।

सेशन जज सर वुडरूफ शारीर के विशेषज्ञ नहीं थे। उनकी 'सर्पेन्ट पावर' में कतिपय गहरी त्रुटियां प्रवेश पा गई हैं, क्योंकि उन्होंने कई स्थलों पर पाठान्तरों को चुनकर अनुवाद किया है, जिसे मैं अन्यत्र दिखा चुका हूँ। वे आधुनिक विज्ञान के साथ षट्चक्र निरूपण के तादात्म्य को समझ नहीं पाये थे जिसे उन्होंने स्वयं स्वीकार किया है। अतः उनके अनुवाद पर ही निर्भर करते रहने का कोई औचित्य नहीं है।

कुन्डलिनी योग के इस ग्रन्थ तथा अन्य भी ग्रन्थों के स्वतन्त्र अध्ययन के बाद तथा सही दृष्टि-कोण से देखने पर योग की तांत्रिकी आधुनिक विज्ञान से बारीकी से मेल खाती सिद्ध होती है तथा उसमें रहस्यात्मकता नहीं मिलती है। इस कारण यह प्राचीन योगियों की एक उत्कृष्ट उपलब्धि है। इसको सही तरह से समझने के लिये संस्कृत भाषा की सामर्थ्य से परिचय आवश्यक है।

न्यूरालॉजी की उपादेयता के सम्बन्ध में योग का मौलिक दृष्टिकोण वैज्ञानिकों के लिये विचार सामग्री प्रस्तुत करता है।

अन्वेषण की भारतीय विधि

वैज्ञानिक अनुसन्धान के आधुनिक उन्नत साधन प्राचीन भारतीयों को प्राप्त नहीं थे पर इसके बावजूद उनका तांत्रिकी का ज्ञान अत्यन्त समुन्नत था। षटचक्र निरूपण से ज्ञात होता है कि यह उप-लब्धि ध्यान योग से सम्भव है [XVIII] ध्यान योग की साधना अष्टांग योग का ही भाग है। [XIX] अन्तःप्रेक्षण की इस तकनीक में मन ही अनुसन्धान का यंत्र है। आज हम यन्त्रों द्वारा ईथर की लहरों को पकड़ कर हजारों मील से देख सुन लेते हैं। इस प्रकार समय तथा दूरी का बन्धन टूट गया है।

चैतन्य आत्मा ईथर से भी सूक्ष्म तथा सर्वव्यापी है। योगी इसी चैतन्य का आश्रय लेकर समय, दूरी तथा पदार्थ का भी भेदन करके सब कुछ देख, सुन और जान लेते हैं। 'यत् ज्ञात्वा नहि भूयोऽन्यत् ज्ञातव्यं अवशिष्यते' (गीता 7/2.)। जिस मानवी चेतना को लेकर हम सब पैदा हुए हैं उससे ऊँचे स्तर का यह सर्वव्यापी चैतन्य है।

सिगरीस्ट (1961) लिखते हैं कि "ध्यान और समाधि से प्रज्ञा मुक्त हो जाती है। समय और दूरी का व्यवधान हट जाता है। भौतिकता से ऊपर की दुनिया का द्वार खुल जाता है। परम आनन्द की अनुभूतियों के यत्किंचित अनुभव सभी धर्मों में मिलते हैं, पर ध्यान की तकनीक का विकास भारत के समान अन्यत्र कहीं नहीं हुआ।"

स्वामी विवेकानन्द (1970) स्पष्ट करते हैं, कि "जो योगी अपने प्राण को वश में कर लेता है, वह सर्वज्ञ हो जाता है।"

षट्चक्र निरूपण इसकी पूरी पुष्टि करता है। [XX]

इस प्रकार यह सिद्ध हुआ है कि पुरातन योगीजनों ने अपने आडम्बरहीन उपायों से शरीर रचना

और क्रिया को जितना सही रूप में समझा, उतना कोई आधुनिक उपकरणों वाली प्रयोगशाला समझा नहीं सकती ।

निष्कर्ष

योग-साहित्य की तांत्रिकी ग्रीक स्कूलों की पूर्ववर्ती है । यह योगशास्त्र एवं तन्त्रशास्त्र के बहु-संख्यक ग्रन्थों की विशाल परिधि में यत्र-तत्र बिखरी मिलती है । इस विषय को ठीक ठीक समझने के लिये यह आवश्यक है कि इस सम्पूर्ण उपलब्ध साहित्य को मूल रूप में अध्ययन किया जाय ।

योग-साहित्य में तांत्रिकी का वर्णन केवल योगसाधना में सहायता के उद्देश्य से किया गया है न कि किसी विद्योचित जिज्ञासा पूर्ति या चिकित्सा सुविधा के हेतु । अतः अपने सही संदर्भ में ही उसका मूल्यांकन किया जाना उचित है ।

योग ग्रन्थों के तांत्रिकी के वर्णन सूक्ष्म रूप में होने पर भी उच्च कोटि के हैं तथा आधुनिक तांत्रिकी विज्ञान से पग-पग पर सम्मत हैं । इनमें कोई गुप्त रहस्य वाली बात है ही नहीं । इनकी जो तथा-कथित रहस्यमयता है वह उन संस्कृत के पंडितों ने पिछली शताब्दी में उत्पन्न की है जो शारीर विज्ञान से नितान्त अपरिचित थे या उन पाश्चात्य चिकित्सा शास्त्रियों ने पैदा की है जो संस्कृत भाषा की क्षमताओं से अपरिचित थे ।

पठनीय

I

योगयाज्ञवल्क्यम्, रूद्रयामल, भूतशुद्धिः, त्रिपुरासारसमुच्चय वामकेश्वर तंत्र, त्रिशिखी ब्राह्मणोपनिषत्, योगशिखोपनिषत्, योगराजोपनिषत्, शिवसंहिता श्रीतत्वचिन्तामणि, महाभारत (तथा भगवद्गीता) ।

II

मेरोर्बाह्यप्रदेशे शशिमिहिरशिरे सव्यदक्षे निषण्णे ।
मध्ये नाडी सुषुम्णा त्रितयगुणामयी सूर्यचन्द्राग्निरूपा ।
धुस्तुरस्मेरपुष्प प्रथिततमवपुः कन्दमध्याच्छिरस्था ।
वज्राख्या मेढ्रदेशच्छिरसि परिगता मध्यमेस्याज्वलन्ती ।। 1 ।।
तन्मध्ये चित्रिणी सा प्रणवविलसिता योगिनां योगगम्या
लूतातन्तूपमेया सकलसरसिजान् मेरुमध्यान्तरस्थान् ।
भित्वा देदीप्यते तद्ग्रथनरचनया शुद्धबोधप्रबोधा,
तन्मध्ये ब्रह्मनाडी हरमुखकुहरादादि देवान्तसंस्था ।। 2 ।।
विद्युन्मालाविलासा मुनिमनसिलसत्तन्तुरूपासुसूक्ष्मा,
ब्रह्मद्वारं तदास्ये प्रविलसति सुधाधारगम्य प्रदेशम् ।

षटचक्रानिरूपणे ।

III

इडा च पिंगला चैव तस्यवामे च दक्षिणे
ऋज्वीभूता शिरे ते च वामदक्षिणभेदत:
सर्वपद्मानि संवेष्ट्य नासारन्ध्रगते शुभे ।

। रुद्रयामले ।

वामदक्षिण भेदेन वेणीवन्धक्रमेण
ऋज्वीभूते इडा पिंगला शिरे इत्यर्थ:

IV

सुषुम्णा कविताजाता वामभागं समाश्रिता
हृद्गता वामभागस्था जत्रुमध्ये समाश्रिता ।
सुषुम्णा कविताजाता वामभागं समाश्रिता
हृद्गता वाम भागस्था जत्रुमध्ये समाश्रिता ।

। षटचविवृति: ।

V

गुदात्तु द्वयंगुलादूर्ध्वं मेढ्रात्तुद्वयंऽगुलादर्ध: ।
चतुरंगुलविस्तारं कन्दमूलं खगाण्डवत् ।।

VI

पृष्ठमध्ये स्थिता नाडी सा हि मूर्ध्नि व्यस्थिता ।
मुक्तिमार्गे सुषुम्णा सा ब्रह्मरन्ध्रे प्रतिष्ठिता ।।

। योगयाज्ञवल्क्य 4/30 ।

मेरूमध्ये स्थिता या तु सुषुम्णा बहुरूपिणी ।
विसर्गाद्विन्दुपर्यन्तं व्याप्य तिष्ठति तत्वत: ।।

। रुद्रयामल 27/53 ।

सहस्राम्बुजं विन्दुस्थानं ज्ञेयं ।

। रुद्रयामल 27/70 ।

सुषुम्णा मेरुणा याता ब्रह्मरन्ध्रं यतोऽस्ति वै ।

। शिवसंहिता 5/120 ।

अतउर्ध्वं तालुमूले सहस्रारं सरोरुहम् ।
अस्ति यत्र सुषुम्णाया: मूलं सविवरं स्थितम् ।।

। शिवसंहिता 5/120 ।

VII

सुषुम्णा चव्यवल्लीव मेरुस्लिष्टा पुरोगता ।
ग्रीवान्तं प्राप्य गलिता तिर्यग्भूता वरानने
शंखिनीनालमालम्ब्य गता सा ब्रह्मसादनम् भूतशुद्धि:

VIII

अथाधार पद्मं सुषुम्णास्य लग्नं भुजाधो गुदोर्ध्वं··· ।

षटचक्रनिरूपण । 4 ।

IX वज्राख्या मेढ्देशाच्छिरसि परिगता ......

षटचक्रनिरूपण । 9 ।

तन्मध्ये ब्रह्मनाडी हरमुखकुहरादादि देवान्तसंस्था ।

षटचक्रनिरूपण । 2 ।

X इडा पिंगला सौषुम्णा प्राणमार्गे च संस्थिता ।
सततं प्राणवाहिन्यः चन्द्रसूर्याग्नि देवता ।।

योगशिखोपनिषत । 29-62 ।

XI इडा च पिंगला चैव सुषुम्णा च सरस्वती ।
वारुणी चैव पूषा च हस्ति जिह्वा यशस्विनी ।।
विश्वोदरा कुहूस्वैव शंखिनी च पयस्विनी ।
अलम्बुषा च गान्धारी मुख्यावैता चतुर्दश ।।

। योगयाज्ञवल्क्य 4/26-28 ।

XII या मुण्डा घारदण्डान्तर विवरगता हारनीहार गौरी
तस्या वज्राख्यनाड्या: खगमुदरदरी मध्यगंयोविध्यात

त्रिपुरासारसमुच्चय 3/45

XIII चित्रं किर्मीर कल्माष शबलैताश्च कर्बुरे ।

इत्यमरः ।

चित्रं आलेख्ये कर्बुरे इति हेमः ।

XIV पवनैर्भस्म कपोत कर्बुरम् ।

कुमारसंभव 4/27

कर्बुरम् कपोतवर्णम् ।

XV तालुकाचक्रं घण्टिका ध्यानमुच्यते

योगराजोपनिषत । 13 ।

तालुचक्रं । तत्रामृतधारा प्रवाह ।

सौभाग्य लक्ष्मी उपनिषत् । 20 ।

XVI तदूर्ध्वे चन्द्रार्धस्तदुपरि विलसद्बिन्दु रूपीमकारः ।
तदाघेनादे सौ जलधवलसुधाधार सन्तान हासी ।।

षटचक्रनिरूपण ।। 35 ।।

XVII तदूर्ध्वे पद्मं दशशतदलं पूर्ण चन्द्राति शुभ्रम ।। 40 ।।
त्रिकोणं तस्यान्तः स्फुरति च सततं विद्युदाकाररूपं ।
तदन्तः शून्यं तत्सकलसुरगणौ सेवितं चातिगुप्तम् ।। 41 ।।
सुधाधारासारं निरवधि विमुंचन्नतितराम् ।। 43 ।।

XVIII ज्ञानध्यान प्रकाशः प्रथमकिसलयाकाररूपः स्वंयभू । 9 ।
तन्मध्ये चित्रिणी सा प्रणवविलसितायोगिनां योग गम्या । 2 ।
मुनिमनसि लसत् तन्तुरूपा सुसूक्ष्मा । 3 ।

षटचक्रानिरूपणे

XIX यम नियमासन प्राणायाम प्रत्याहार धारणाध्यान समाधयोऽष्टावंगानि
पातंजल योगसूत्र, समाधिपाद् । 29 ।

XX इहस्थाने चित्तं निरवधि विनिधायात्म सम्पूर्ण योगः ।
कविर्वाग्मी ज्ञानी स भवति नितरां साधकः शान्तचेताः ।
त्रिकालानांदर्शी सकलहितकरो रोगशोकप्रमुक्तः ।

षटचक्रनिरूपण । 30 ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस प्रबन्ध के चित्र सं० 1, 2 तथा 4 के लिए 'ग्रेज अनाटमी' पुस्तक के तीन चित्रों से सहायता लेने की अनुमति देने के लिए मैं श्रीमन्त चर्चिल लिविंगस्टन, एडिनबर्ग का हृदय से आभारी हूँ ।

निर्देश

1. कुवलयानन्द स्वामी, **प्राणायाम**, 1966, 44, **प्रथम संस्करण, पोपुलर प्रकाशन, बम्बई**
2. केसरवानी, एन० एच०, **दी साइंस आफ मेडिसिन एंड फिजियोलॉजिकल कन्सेप्ट्स इन एनशियन्ट इंडिया** 1974, 46, **प्रथम सं० ए० आइ० आइ० एम० एस०, न्यू दिल्ली**
3. केसरवानी, एन० एच०, **वही**, 1974, 41
4. **कैम्ब्रिज हिस्ट्री आफ इंडिया, खंड प्रथम**, 359, **सम्पादक, रैपसन, ई० जे०, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी, प्रेस**
5. ग्रेज अनाटमी 1973, 755, 35**वां संस्करण, चर्चिल लिविंगस्टन, एडिनबर्ग** ।
6. जग्गी, ओ० पी०, **योगिक एंड तांत्रिक मेडिसिन**, 1971, 4, 67, **प्रथम सं० आत्माराम एंड सन्स, दिल्ली**
7. जग्गी ओ० पी०, **वही**, 1971, 63.

8. बलदेव सिंह तथा छीना, जी० एस० "साइंस आफ मेडिसन एंड फिजियोलॉजिकल कन्सेप्ट्स इन एंशियन्ट इंडिया" 1974, 94-95 प्रथम सं० ए० आई० श्राई० एम० एस०, न्यू दिल्ली।

9. बलदेव सिंह तथा छीना, जी० एस० वही, 1974, 91.

10. ब्रिग्स, जी० डब्लू० गोरखनाथ एण्ड कानफटा योगीज 1938, 308, प्रथम सं०, मोतीलाल बनारसी दास, दिल्ली

11. ब्रिग्स, जी० डब्लू०, वही, 1938, 259.

12. ब्रिग्स, जी० डब्लू०, वही, 1938, 269.

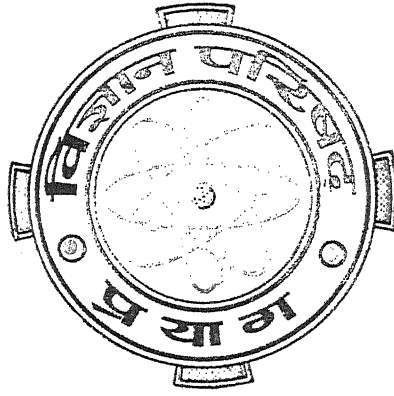
13. ब्रिग्स, जी० डब्लू०, वही, 1938, 281.

14. षटचक्रनिरूपण, आर्थर एवलान तांत्रिक टैक्स्ट खंड 2 संपादक तारानाथ विद्यारत्न, तृ० सं० लूजाक एण्ड कम्पनी, लंदन

15. विवेकानन्द स्वामी, कम्प्लीट वर्क्स आफ स्वामी विवेकानन्द, खंड 1, 1970, 148-149 तेरहवाँ सं० सपादक वुधानन्द स्वामी, श्रद्वैत आश्रम, कलकत्ता

16. वुड्रूफ, जे०, सर्पेन्ट पावर, 1958, 110, छठा सं०, गणेश एण्ड कम्पनी, मद्रास

17. वुड्रूफ, जे०, वही, 1958, 320.

18. वुड्रूफ, जे०, वही, 1958, 6.

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 4, October, 1976, Pages 295-301

दृश्य प्रकाश में ऐमीनो अम्लों का स्वतः ऑक्सीकरण

नरेन्द्र कुमार श्रीवास्तव

शीला धर संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—फरवरी 20, 1976]

सारांश

दृश्य प्रकाश में ऐमीनो-अम्लो के स्वतः ऑक्सीकरण में पी-एच, सांद्रता और ताप परिवर्तन और ग्लूकोस, बेरियम क्लोराइड और मोनोकैल्सियम फास्फेट के योग के प्रभाव का अध्ययन किया गया है।

Abstract

Auto-oxidation of amino-acids in visible light. *By* Narendra Kumar Srivastava Sheila Dhar Institute, University of Allahabad, Allahabad.

Influence of pH, concentration and temperature variation and glucose, barium chloride and mono-calcium phosphate addition on the auto-oxidation of amino acids in visible light have been investigated.

ऐमीनो अम्लों में α-ऐमीनो समूह जल अपघटन के प्रति अत्यन्त स्थायी होता है तथा उपयुक्त परिस्थितियों में ऐलीफेटिक प्राइमरी ऐमीन की भाँति आचरण करता है, परन्तु ऑक्सीकरण के उपरान्त सरलता से विऐम्मीनीकृत हो जाता है। वायुमण्डलीय ऑक्सीजन द्वारा अम्लों का स्वतः-ऑक्सीकरण पैलेडियम ब्लैक, सूक्ष्म लोह चूर्ण तथा कोयला चूर्ण आदि उत्प्रेरकों[1] की उपस्थिति में होता है। एक्स-किरणों[2] तथा पराबैंगनी प्रकाश[3] में ऐमीनो अम्लों का प्रकाशांशन होता है जिसके फलस्वरूप α-ऐमीनो समूह विऐम्मीनीकृत होता है। सूर्य के प्रकाश में यूरैनिल लवण, लोह लवण, सोडियम डाइसल्फो-ऐन्थ्राक्विनोन रंजक[4] और टाइटेनिया[5] आदि प्रकाश-सुग्राहकों की उपस्थिति में ऐमीनो अम्लों का स्वतः ऑक्सीकरण होता है। दृश्य प्रकाश में ऐल्युमिना, फेरिक ऑक्साइड, टाइटेनिया, जिंक ऑक्साइड आदि धात्विक ऑक्साइडों की उपस्थिति में ऐमीनो अम्लों का प्रकाश-सुग्राहित विऐम्मीनीकरण[6] होता है।

AP 1

ऐमीनो अम्ल तथा दृश्य प्रकाश दोनों ही जीवन के लिए महत्वपूर्ण हैं। दृश्य प्रकाश में ऐमीनो अम्लों के स्वत:ऑक्सीकरण का विस्तृत अध्ययन अभी तक नहीं हुआ है, अतः प्रस्तुत अध्ययन इसी दृष्टिकोण से किया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिये ऐलानिन, सिस्टिन, ग्लुटैमिक अम्ल, हिस्टडिन, लाइसिन, ल्युसिन, मेथियोनिन, ट्रिप्टोफैन तथा वैलिन सभी α-ऐमीनो अम्ल के *dl* मिश्रण प्रयुक्त किये गये। अभिक्रिया का संचालन निश्चित ताप पर तापस्थापी में रखे 'जेना' काँच की बोतलों में किया गया जिन्हें 50 सेमी० पर स्थित 1,000 वाट गैस पूरित उद्दीप्त लैम्प द्वारा प्रकाशित किया गया; अंधकारित प्रयोगों में बोतलों को मोटे काले वस्त्र से ढका गया। ऐमीनो अम्लों के जलीय विलयन में सान्द्र सल्फ्यूरिक अम्ल, 50% प्रतिशत पोटैशियम हाइड्राक्साइड तथा आसुत जल द्वारा धावित वायु, चूषित्र की सहायता से, 20 लिटर प्रति घंटे की स्थिर गति से प्रवाहित की गई। निष्कासित वायु के साथ विमुक्त अमोनिया को

सारणी 1

ऐमीनो अम्लों का दृश्य प्रकाश में स्वतः ऑक्सीकरण

(ताप=35°C; वायु प्रवाह =20 लि०/घंटा; ऐमीनो अम्ल≡0.19*N*)

ऑक्सीकरण का प्रतिशत

ऐमीनो अम्ल	CO_2	वायु				
प्रकाश घंटा	50	10	20	30	40	50
1. ऐलानीन	1.5	5.6	10.2	14.4	18.1	21.6
2. सिस्टीन	1.3	5.1	9.0	12.6	16.2	19.4
3. ग्लुटैमिक अम्ल	0.8	3.5	7.2	10.4	13.1	15.7
4. हिस्टिडिन	2.2	7.3	13.8	19.8	25.8	31.1
5. ल्युसिन	1.1	4.7	8.6	11.9	15.1	18.6
6. लाइसिन	1.9	6.1	11.4	16.3	21.1	25.5
7. मेथियोनिन	1.2	6.8	8.8	12.1	15.3	18.3
8. ट्रिप्टोफैन	1.0	4.3	8.2	11.5	14.6	17.4
9. वैलिन	1.4	5.4	9.5	13.1	16.8	20.1

अंधकार में कोई आक्सीकरण नहीं

रोकने तथा निश्चयन हेतु इसे सल्फ्यूरिक अम्ल के मानक विलयन में से प्रवाहित किया गया। कार्बन डाइ-ऑक्साइड का निर्माण 'किप्स' उपकरण में संगमरमर तथा HCl डाल कर किया गया। इसे आसुत जल में प्रवाहित करके शुद्ध किया गया। ग्लूकोस, बेरियम क्लोराइड और मोनोकैल्सियम फास्फेट नवीन विलयन के रूप मे मिश्रित किये गये, मिश्रण का आरम्भिक आयतन 100 मिली० स्थिर रखा गया। अभिक्रिया सामान्यतः उदासीन माध्यम में संचालित की गई अन्यथा अभीष्ट पी-एच HCl अथवा NaOH द्वारा समंजित किया गया।

निश्चित अवधि के उपरान्त अभिक्रिया पात्र से 10 मिली० मिश्रण निकाल कर द्वि आसुत जल से 100 मिली बनाया गया, इसी विलयन से कुल-N, अमोनिकल-N तथा नाइट्रेट-N[7] तथा अनॉक्सीकृत ऐमीनो अम्ल का रंगमापी पर निन्हाइड्रिन विधि से[8] निश्चयन किया गया। पी-एच मापन बेकमैन पी-एच मापी द्वारा किया गया। सभी लवण 'एनालार' तथा ऐमीनो अम्ल 'बायोकेमिकल' कोटि के, बी० डी० एच० अथवा ई० मर्क के प्रयुक्त किये गये।

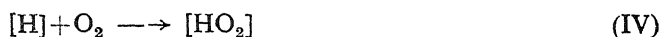
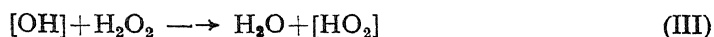
परिणाम एवं विवेचना

सारणी-1 में दिये गये परिणामों के विश्लेषण से ज्ञात होता है कि ऐमीनो अम्ल प्रकाश में स्वतः आक्सीकृत होते हैं, अतः अभिक्रिया मूलतः प्रकाश-रासायनिक है। अभिक्रिया वायु की अनुपस्थिति में कार्बन डाइ-ऑक्साइड के वातावरण में भी यथेष्ट रूप से अग्रसर होती है। इससे यह इंगित होता है कि प्रारम्भिक अभिक्रिया में ऑक्सीजन सम्मिलित नहीं है। प्रकाश की क्रिया प्रत्यक्ष ऐमीनो अम्ल अणुओं अथवा अप्रत्यक्ष रूप से जल अणुओं के माध्यम से हो सकती है। प्रकाश की विकरित ऊर्जा द्वारा जल अणुओं का प्रकाशांशन सर्वविदित है जिसके फलस्वरूप सक्रिय परमाणविक हाइड्रोजन तथा हाइड्राक्सिल मूलक उत्पन्न होते हैं (I) जिनकी और अधिक अभिक्रियायें (II), (III) और (IV) संभावित हैं।

$$H_2O + 112\ KCal \longrightarrow [H] + [OH] \quad (I)$$

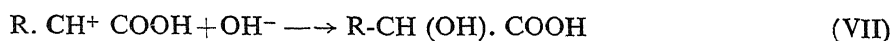
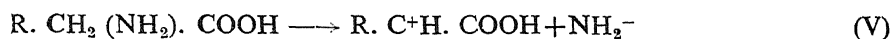
$$2\,[OH] \longrightarrow H_2O_2 \quad (II)$$

$$[OH] + H_2O_2 \longrightarrow H_2O + [HO_2] \quad (III)$$

$$[H] + O_2 \longrightarrow [HO_2] \quad (IV)$$

अभिक्रिया (IV) ऑक्सीजन की उपस्थिति में ही संभव है जो अभिक्रिया में ऑक्सीजन के महत्व को स्पष्टतया दर्शाती है। अमोनिया निर्माण की अभिक्रिया निम्नलिखित अभिक्रियाओं द्वारा दर्शायी जा सकती है :

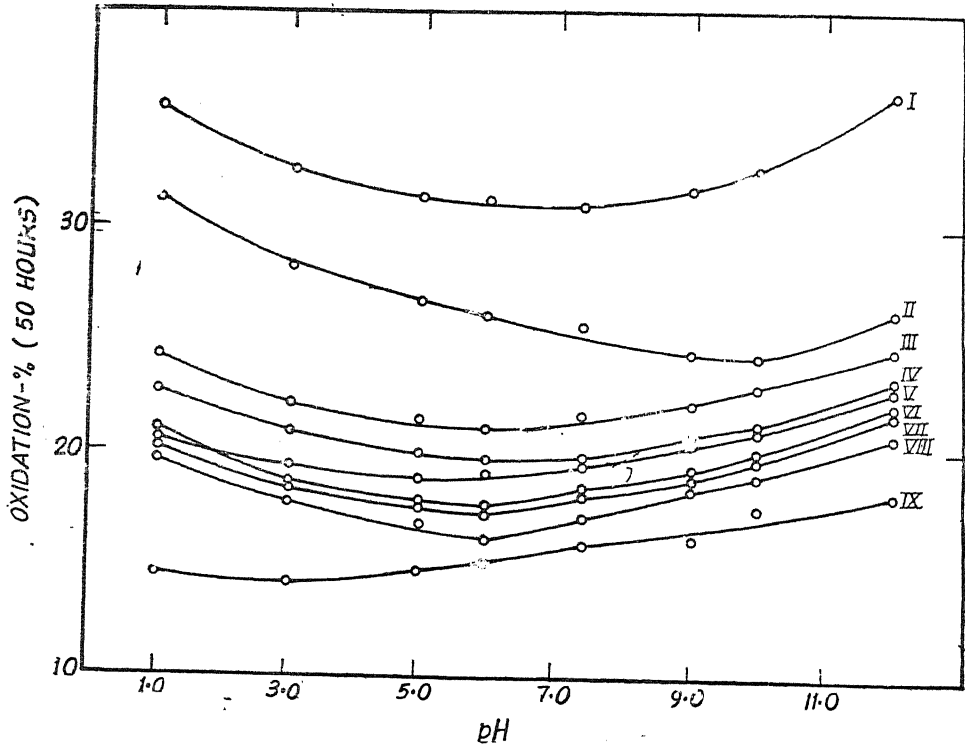
$$R.\ CH_2\ (NH_2).\ COOH \longrightarrow R.\ C^{+}H.\ COOH + NH_2^{-} \quad (V)$$

$$NH_2^{-} + H^{+} \longrightarrow NH_3 \quad (VI)$$

$$R.\ CH^{+}\ COOH + OH^{-} \longrightarrow R\text{-}CH\ (OH).\ COOH \quad (VII)$$

ऐमीनो अम्लों के पराबैंगनी प्रकाशांशित विएम्मीकरण में हाइड्राइक्सिल अम्ल प्राप्त होने पर[9] इस सामान्य क्रियाविधि का सुझाव दिया गया ।

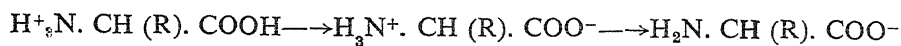
विभिन्न ऐमीनो अम्लों के स्वतः ऑक्सीजन की तुलना करने पर वर्धमान ऑक्सीकरण के अनुसार ऐमीनो अम्लों का निम्नलिखित अनुक्रम प्राप्त हुआ :—

ग्लुटैमिक अम्ल > ट्रिप्टोफैन > ल्युसिन > मेथियोनिन > सिस्टिन > ऐलानिन > वैलिन > लाइसिन > हिस्टिडिन

नाइट्रोजन यौगिकों का ऑक्सीकरण उनके अणुभार, अणुसंरचना, तथा C/N अनुपात पर निर्भर होता है । ग्लुटैमिक अम्ल संभवतः डाइकार्बोक्सिलिक होने[10] से न्यूनतम तथा हिस्टिडिन सबसे कम C/N अनुपात होने के कारण अधिकतम ऑक्सीकृत हुआ । परिणामों से यह प्रतीत होता है कि सारभूत ऐमीनो अम्ल अ-सारभूत ऐमीनो अम्लों की अपेक्षा यथेष्ठतया अधिक ऑक्सीकृत होते हैं ।

चित्र 1-ऐमीनों अम्लों के स्वतो आक्सीकरण पर पी, एच का प्रभाव

वक्र I, II, III, ... IX क्रमशः हिस्टिडीन, लाइसीन, एलानीन, वैलीन, सिस्टीन, मेथियोनीन, ल्यूसीन, ट्रिप्टोफैन तथा ग्लुटैमिक अम्ल

पी-एच का प्रभाव : चित्र-1 में आलेखित परिणामों के विश्लेषण से ज्ञात होता है कि ऐमीनो अम्लों का स्वतः-ऑक्सीकरण माध्यम के पी-एच परिवर्तन से प्रभावित होता है। ऐमीनो अम्ल के समविभव पी-एच के निकट माध्यम का पी-एच होने पर ऑक्सीकरण न्यूनतम होता है, अन्यथा अम्लीय या क्षारीय माध्यम में ऑक्सीकरण में वृद्धि होती है। ऐसा संभवतः समविभव पी-एच पर ऐमीनो अम्ल अणुओं के द्विक् आयन के रूप में रहने के कारण है (VIII) जिनकी द्विध्रुवीय प्रकृति के कारण आयन तथा मूलकों से अभिक्रिया अवरुद्ध होती है।

$H^+_3N.\ CH\ (R).\ COOH \longrightarrow H_3N^+.\ CH\ (R).\ COO^- \longrightarrow H_2N.\ CH\ (R).\ COO^-$

ऐमीनो अम्ल घनायन	द्विक् आयन	ऐमीनो अम्ल ऋणायन
अम्लीय माध्यम	समविभव पी-एच	क्षारीय माध्यम

(VIII)

सारणी 2

हिस्टिडिन के वायुमंडलीय स्वतः आक्सीकरण पर विभिन्न परिस्थितियों का प्रभाव

(ग्लूकोस, $BaCl_2$ तथा $Ca(H_2PO_4)_2$ की सांद्रता=0.01M)

अभिक्रिया मिश्रण	हिस्टिडिन—N (g)	ताप	ऑक्सीकरण % घंटा 10	20	30	40	50
1. हिस्टिडिन	0.01	35°	14	23	32	41	48
2. हिस्टिडिन	0.1	35°	7.3	13.8	19.8	25.8	31.1
3. हिस्टिडिन	1.0	35°	4.92	9.39	12.2	16.34	19.17
4. हिस्टिडिन	0.1	45°	14.9	26.3	36.5	45.5	53.6
5. हिस्टिडिन	0.1	55°	19.4	35.6	48.8	61.2	72.5
6. हिस्टिडिन+ग्लूकोस	0.1	35°	6.8	12.8	18.5	23.6	27.9
7. हिस्टिडिन+$BaCl_2$	0.1	35°	5.5	10.6	15.4	19.8	23.9
8. हिस्टिडिन+$Ca(H_2PO_4)$	0.1	35°	4.1	7.7	11.1	14.0	16.8

सान्द्रता का प्रभाव : विभिन्न प्रायोगिक परिस्थितियों में हिस्टिडिन का स्वतः ऑक्सीकरण का प्रतिशत सारणी-2 में संकलित है, अन्य ऐमीनो अम्लों पर भी कारकों का प्रभाव लगभग इसी अनुपात में पाया गया। परिणाम के विश्लेषण से स्वतः ऑक्सीकरण पर सान्द्रता परिवर्तन का प्रभाव स्पष्टतया

दृष्टिगोचर होता है, विलयन की तनुता में वृद्धि होने पर प्रतिशत ऑक्सीकरण में वृद्धि तथा सांद्रता वृद्धि होने पर ह्रास होता है। यह संभवतः विलयन की सांद्रता परिवर्तन का प्रकाश के अवशोषण पर व्युत्क्रम प्रभाव के कारण है।

ताप का प्रभाव : सारणी-2 में लिये गये परिणामों के विश्लेषण से ज्ञात होता है कि ताप परिवर्तन से स्वतः ऑक्सीकरण की क्रिया प्रभावित होती है, ताप वृद्धि से ऑक्सीकरण में वृद्धि होती है। प्रकाश-रासायनिक क्रियाओं पर ताप परिवर्तन का प्रभाव संभवतः द्वितीयक अभिक्रियाओं की गति में परिवर्तन के कारण होता है, द्वितीयक अभिक्रियायें उष्मीय होती है और अन्धकार में भी हो सकती हैं अतः ताप परिवर्तन से प्रभावित होती हैं।

निरोधकों का प्रभाव : सारणी-2 में संकलित परिणामों के विश्लेषण से ग्लूकोस, बेरियम क्लोराइड तथा मोनो-कैल्सियम फास्फेट के योग का स्वतः ऑक्सीकरण पर निरोधक प्रभाव ज्ञात होता है। अवरोध शक्ति ग्लूकोस> बेरियम क्लोराइड> मोनोकैल्सियम फास्फेट के वर्धमान क्रम में पायी गयी। ग्लूकोस का अवरोधक प्रभाव संभवतः ऐमीनो अम्लों के साथ ग्लूकोसाइड बनने के कारण है[11], ऐमीनो अम्ल के ऑक्सीकरण पर लवण के योग के गति पर द्वितीयक लवण का प्रभाव पड़ता है जिससे विलयन की आयनिक शक्ति और अंततोगत्वा आयतन की मात्रा प्रभावित होती है, बेरियम क्लोराइड की अवरोधक क्रिया संभवतः इसी कारण है। मोनोकैल्सियम फास्फेट की अवरोधक क्रिया संभवतः ऐमीनो अम्ल के फास्फोरिलीकरण होने के कारण होती है।[12]

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक आचार्य एन० आर० धर का पथ-प्रदर्शन एवं निदेशन के लिए अत्यन्त आभारी है।

निर्देश

1. क्लार्क, एच० टी०; Organic Chemistry and advanced treatise, Ed. Gilman, H., भाग II, जान विले एण्ड सन्स, न्यूयार्क
2. स्टेंस्ट्राम, डब्लू०, Radiology, 1929, **13**, 437.
3. लीबेन, एफ० तथा मोलनर, ई०, Biochem. Z. 1931, **230**, 347.
4. न्यूबर्ग, सी० Biochem. Z. 1908, **13**, 304; 1910, **29**, 279
5. गिरि, के० वी०, कल्याणकर, जी० डी० और वैद्यनाथन, सी० एस०, Naturwiss, 1954, **41**, 88; Experimentia 1955, II, 344; प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया, 1955, **24A**, 286
6. धर, एन० आर० तथा हुसन, एस० आर०, प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया 1961, **31A**, 257
7. वोगेल, ए० आई०, Quantitative Inorganic Analysis द्वितीय संस्करण, लांगसमैन, 1951, पृष्ठ 246-248

8. हार्डिंग, वी० जे० तथा मकलियन, आर० एम०, **जर्न० बायो० केमि०**, 1915,**20**, 217; 1916, **24**, 503.

9. वीजमान, सी० इत्यादि, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**; 1936, **58**, 1675; नेचर 1939, **143**, 723

10. धर, एन० आर० तथा राव, जी० जी०, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०** 1934 **11**, 617.

11. हाज तथा हाज, Advances in Carbohydrate Chem., 1955, **10**, 169.

12. धर, एन० आर० तथा घोष, जी० पी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइ० इण्डिया**, 1961, **31**, 111.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No 4, October, 1976, Pages 303-310

दो चरों वाले H-फलन के लिये फूरियर श्रेणी

वाई० एन० प्रसाद तथा ए० सिद्दीकी

संप्रयुक्त गणित अनुभाग, प्रौद्योगिकी संस्थान, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—मार्च 9, 1976]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में दो मूलभूत समाकलों का मान निकाला गया है जिनसे कौल[4] द्वारा प्रयुक्त समाकलों का सार्वीकरण होता है। इनका प्रयोग हमने दो चरों वाले चार समाकलों के मूल्यांकन के लिये भी किया है। इन समाकलों को सार्वीकृत फलन के लिये फूरियर श्रेणी की स्थापना के हेतु प्रयुक्त किया गया है। बहुत से ज्ञात फल हमारे फलों की विशिष्ट दशाओं के रूप में हैं।

Abstract

Fourier series for H-function of two variables. *By* Y. N. Prasad and A. Siddiqui, Applied Mathematics section, Institute of Technology, Banaras Hindu University.

In the present paper we have evaluated two basic integrals which generalise the integrals used by Kaul[4]. We have further used them to evaluate four integrals involving H-function of two variables. These integrals have been used to establish the Fourier series for the generalized function. The results obtained recently by Kaul[4] are the particular cases of our results. Also the results obtained by MacRobert[6, 7], Keservani[5], Bajpai[2], Parashar[9] and Shah[20] can be deduced from our results on specializing the parameters.

1. प्रस्तावना

इस शोधपत्र में द्विगुण मेलिन बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकल को दो चरों वाले H-फलन के रूप में अभिहित किया जावेगा और इसे निम्न प्रकार से परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जावेगा:

$$H(x, y) \equiv \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} m_{1}, n_{1} \\ p_1, q_1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l}\{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\} \\ \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\}\end{array} & \\ \begin{pmatrix} m_2, n_2 \\ p_2, q_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l}\{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\}\end{array} & x, y \\ \begin{pmatrix} m_3, n_3 \\ p_3, q_3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l}\{(e_{p_3}, E_{p_3})\} \\ \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}\end{array} & \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s, t) \theta_1(s) \theta_2(t) x^s y^t \, ds dt \qquad (1 \cdot 1)$$

जहाँ

$$\phi(s, t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(b_j - \beta_j s - B_j t) \prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1 - a_j + \alpha_j s + A_j t)}{\prod_{j=m_1+1}^{q} \Gamma(1 - b_j + \beta_j s + B_j t) \prod_{j=n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_j - \alpha_j s - A_j t)}$$

$$\theta_1(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d_j - \delta_j s) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1 - c_j + \gamma_j s)}{\prod_{j=m_2+1}^{q_2} \Gamma(1 - d_j + \delta_j s) \prod_{j=n_2+1}^{q_2} \Gamma(c_j - \gamma_j s)}$$

एवं $\theta_2(t)$ प्राचल (e_j, E_j) के पदों में परिभाषित है, (f_j, F_j) तथा x, y शून्य के तुल्य नहीं हैं और रिक्त गुणनफल इकाई मान लिया गया है। अनृण पूर्णांक $p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3; m_1, m_2, m_3; n_1, n^2$ n_3; ऐसे हैं कि $0 \leqslant n_1 \leqslant p_1$ $0 \leqslant n_2 \leqslant p_2$; $0 \leqslant n_3 \leqslant p_3$; $0 \leqslant m_1 \leqslant q_1$, $0 \leqslant m_2 \leqslant q_2$; $0 \leqslant m_3 \leqslant q_3$। ग्रीक अक्षर $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, तथा अंग्रेजी के बड़े अक्षर A, B, E, F ये सभी धन हैं।

कंटूर L_1 s-तल में है और अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण है और यदि आवश्यकता हुई तो आश्वस्त करता है कि $\Gamma(d_j - \delta_j s)$ $(j=1, 2, \ldots, m_2)$ तथा $\Gamma(b_j - \beta_j s - B_j t)$, $(j=1, 2, \ldots, m_1)$ के पोल कंटूर के दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1 - a_j + \alpha_j s + A_j t)$, $(j=1, 2, \ldots, n_1$ और $\Gamma(1 - c_j + \gamma_j s)$, $(j=1, 2, \ldots, n_2)$ के बाईं ओर पड़ें। इसी प्रकार कंटूर L_2 t-तल में है और अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण है और आवश्यकता पड़ने पर आश्वस्त करता है कि $\Gamma(b_j - \beta_j s - B_j t)$, $(j=1, 2, \ldots, m_1)$ तथा $\Gamma(f_j - F_j t)$, $(j=1, 2, \ldots, m_3)$ के पोल कंटूर के दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1 - a_j + \alpha_j s + A_j t)$, $(j=1, 2, \ldots, n_1)$, $\Gamma(1 - e_j + E_j t)$, $(j=1, 2, \ldots, n_3)$ के बाईं ओर पड़ें।

इस प्रपत्र में हम निम्नांकित संकेतनों

$$H\begin{pmatrix} m_1, n_1 \\ p_1, q_1 \end{pmatrix} \begin{array}{l}\{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\} \\ \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\}\end{array} x, y$$

— — —

— — —

का उषयोग यह दिखाने के लिये करेंगे कि ... द्वारा प्रदर्शित प्राचल ठीक वैसे ही हैं जैसे (1·1) में $H(x, y)$ के । यही निम्नलिखित संकेतों के लिये भी सत्य है:

$$H\left[\begin{array}{c|c|c} - \quad - & - \quad - & \\ \begin{pmatrix} m_2, n_2 \\ p_2, q_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l}\{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\}\end{array} & x, y \\ - \quad - & - \quad - & \end{array}\right] \text{ तथा, } H\left[\begin{array}{c|c|c} - \quad - & - \quad - & \\ - \quad - & - \quad - & x, y \\ \begin{pmatrix} m_3, n_3 \\ p_3, q_3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l}\{(e_{p_3}, E_{p_3})\} \\ \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}\end{array} & \end{array}\right]$$

संकेत $\{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}$ प्राचलों के समुच्चय $(a_1, \alpha_1, A_1), (a_2, \alpha_2, A_2)\ldots(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})$ के लिये तथा $H_1(x, y)$ दो चरों वाले H-फलन के लिये आया है जो (1·1) में $m_1=0$ रखने से प्राप्त होता है ।

प्राचलों के अन्य प्रतिबन्ध दो चरों वाले H-फलन के ही तुल्य हैं । इन्हें मित्तल तथा गुप्ता[8] ने विस्तार में दिया है ।

2. हम निम्नांकित समाकलों की स्थापना करेंगे

$$\text{(i)} \int_0^\pi \cos p\theta(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}(\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1}\, d\theta = \frac{\Gamma(p+\rho+\frac{1}{2})\Gamma(\rho_1+\frac{1}{2})}{2\Gamma(p+\rho+\rho_1+1)}$$

$$\times {}_3F_2\left[\begin{matrix}(\rho_1+\frac{1}{2}), (-p), (-p+\frac{1}{2}); \\ (-p-\rho+\frac{1}{2}), (\frac{1}{2});\end{matrix}\; 1\right]$$

बशर्ते कि $R(2\rho+1)>0$, $K(2\rho_1+1)>0$ तथा $p=0, 1, 2\ldots$

$$\text{(ii)} \int_0^\pi \sin(2r+1)\theta(\cos\theta)^{2\rho}(\sin\theta)^{2\rho_1}\, d\theta = \frac{\Gamma(2r+2)\Gamma(r+\rho+\frac{1}{2})\Gamma(\rho_1+1)}{\Gamma\left(r+\rho+\rho_1+\frac{3}{2}\right)\Gamma(2r+1)}.$$

$$\times {}_3F_2\left[\begin{matrix}(\rho_1+1), (-r), (-r+\frac{1}{2}); \\ (-r-\rho+\frac{1}{2}), \left(\frac{3}{2}\right);\end{matrix}\; 1\right] \qquad (2{\cdot}2)$$

बशर्ते कि $R(\rho+1)>0$, $R(\rho_1+1)>0$ तथा $r=0, 1, 2, \ldots$

$$\text{(iii)} \int_0^\pi \{(\cos\theta/2)^{2\rho}(\sin\theta/2)^{2\rho_1} H\{[x(\cos\theta/2)^{2h}(\sin\theta/2)\}^{2h_1}, y\{(\cos\theta/2)^{2k}(\sin\theta/2)\}^{2k_4}]\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} H\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} m_1, 2+n_1 \\ 2+p_1, 1+q_1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l}(\frac{1}{2}-\rho, h, k), (\frac{1}{2}-\rho_1, h_1, k_1), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\} \\ (-\rho-\rho_1, h+h_1, k+k_1), \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\}\end{array} & \\ - \quad - & - \quad - \quad - \quad - & x, y \\ - \quad - & - \quad - \quad - \quad - & \end{array}\right]. \qquad (2{\cdot}3)$$

बशर्ते कि $R(2\rho+2h\alpha+2k\beta+1)>0$, $R(2\rho_1+2h_1\alpha+2k_1\beta+1)>0$ तथा $0\leqslant\theta\leqslant\pi$

(iv) $\int_0^{\pi} \cos p\theta(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}(\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1} H[x\{(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2h}(\sin \tfrac{1}{2}\theta)\}^{2h_1}, y\{(\cos \tfrac{1}{2}\theta^2k(\sin \tfrac{1}{2}\theta)\}^{2k_1}]\, d\theta$

$$=\sum_{r=0}^{p} \frac{(-p)_r(-p+\frac{1}{2})_r}{(\frac{1}{2})_r\, r\,!}$$

$$\times H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}m_1, 1+n_1\\ 2+p_1, 1+q_1\end{pmatrix}\\ - \quad -\\ - \quad -\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\frac{1}{2}-r-\rho_1, h_1, k_1), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A\rho_1)\}, (r-p-\rho+\frac{1}{2}, h, k)\\ (-\rho-\rho_1-p, h+h_1, k+k_1), \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\}\\ - \quad - \quad - \quad -\\ - \quad - \quad - \quad -\end{matrix}\right| x, y\right] \tag{2·4}$$

बशर्ते कि $R(2\rho+2h\alpha+2k\rho+1)>0$, $R(2\rho_1+h_1\alpha+2k_1\rho+1)>0$ तथा $p=0, 1, 2, \ldots$

(v) $\int_0^{\pi} \sin (2r+1)\theta(\cos \theta)^{2\rho}(\sin \theta)^{2\rho_1} H[x\{(\cos \theta)^{2h}(\sin \theta)\}^{2h_1}, y(\cos \theta)^{2k}(\sin \theta)\}^{2k_1}]\, d\theta$

$$=\sum_{n=0}^{r} \frac{(-r)_n(-r+\frac{1}{2})_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n n\,!}\ (2r+1).$$

$$\times H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}m_1, 1+n_1\\ 2+p_1, 1+q_1\end{pmatrix}\\ - \quad -\\ - \quad -\end{matrix}\left|\begin{matrix}(-\rho_1-h; h_1, k_1), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}, (-r-\rho+n+\frac{1}{2}, h, k)\\ (-r-\rho-\rho_1-\frac{1}{2}, h+h_1, k+k_1), \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\}\\ - \quad - \quad - \quad -\\ - \quad - \quad - \quad -\end{matrix}\right| x, y\right] \tag{2·5}$$

बशर्ते कि$R(\rho_1+h_1\alpha+k_1\beta+1)>0$ तथा $r=0, 1, 2, \ldots$

उपपत्ति

(2·1) तथा (2·2) की उपपत्ति हेतु हम $\cos 2p\theta$ तथा $\sin (2r+1)\theta$ को $\cos \theta$ एवं $\sin \theta$ के घात में प्रसार करेंगे, प्रसारों को (2·1) तथा (2·2) के समाकल्य में रखेंगे और प्रत्येक पद का मान गामा फलन की सहायता से निकालेंगे । निम्नांकित सूत्र का भी उपपयोग करेंगे

$$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\,\Gamma(z)\,\Gamma(z+\tfrac{1}{2});\ \Gamma(z-r+1)=(-1)^r\,\frac{\Gamma(z+1)\,\Gamma(-z)}{\Gamma(-z+r)}$$

(2·3) को सिद्ध करने के लिये (2·3) के समाकल में आये दो चरों वाले H-फलन के लिये द्विगुण मेलिन-बार्नीज़ प्रकार के कंटूर समाकल को (1·1) में से प्रतिस्थापित करेंगे । समाकलन के क्रम को

पारस्परिक विनिमय करके आन्तरिक समाकल का मान गामा फलन की सहायता से निकालते हैं और इस प्रकार से प्राप्त समाकल की व्याख्या (1·1) की सहायता से करते हैं। परिणाम (2·1) तथा (2·2) के द्वारा इसी प्रकार अनुसरण करते हुये परिणाम (2·4) तथा (2·5) भी प्राप्त किये जा सकते हैं। (2·1) में दिये हुये प्रतिबन्धों के कारण समाकलन तथा संकलन के क्रम परिवर्तन अनुज्ञेय हैं।

3. इस अनुभाग में दो चरों वाले H-फलन के लिये निम्नांकित फूरियर श्रेणियों की स्थापना की जावेगी।

(i) $\{(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}(\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1} H[x\{(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2h}(\sin \tfrac{1}{2}\theta)\}^{2h_1}, y\{(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2k}(\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2k_1})\}]$

$$=\frac{1}{\pi}\; H\left[\begin{pmatrix} m_1, 2+n_1 \\ 2+p_1, 1+q_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ - \quad - \\ - \quad - \end{matrix}\left|\begin{matrix} (\tfrac{1}{2}-\rho, h, k), (\tfrac{1}{2}-\rho_1, h_1, k_1), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\} \\ (-\rho-\rho_1, h+h_1, k+k_1), \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\} \\ - \qquad - \\ - \qquad - \end{matrix}\right| x, y\right]$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\sum_{r=0}^{p}\frac{(-p)_r(-p+\tfrac{1}{2})_r}{(\tfrac{1}{2})_r\, r\,!}\right.$$

$$\left.\times H\left[\begin{pmatrix} m_1, 1+n_1 \\ 2+p_1, 1+q_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ - \quad - \\ - \quad - \end{matrix}\left|\begin{matrix} (\tfrac{1}{2}-r-\rho_1, h_1, k_1), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}, \\ (r-p-\rho+\tfrac{1}{2}, h, k) \\ (-p-\rho-\rho_1, h+h_1, k+k_1)\, \{(a_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1}')\} \\ - \qquad - \\ - \qquad - \end{matrix}\right| x, y\right]\right\} \cos p\theta. \tag{3·1}$$

बशर्ते कि $R(2\rho+2h\alpha+2k\beta+1)>0$, $R(2\rho_1+2h_1\alpha+2k_1\beta+1)>0$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ तथा $p=0, 1, 2, \ldots$

(ii) $\{(\cos \theta)^{2\rho}(\sin \theta)^{2\rho_1}, H[x\{(\cos \theta)^{2h}(\sin \theta)^{h_1}, y\{(\cos \theta)^{2k}(\sin \theta)\}^{2k_1}]$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)\left\{\sum_{n=0}^{r}\frac{(-r)_n(-r+\tfrac{1}{2})_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n n\,!}\right.$$

$$\left.\times H\left[\begin{pmatrix} m_1, 1+n_1 \\ 2+p, 1+q_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ - \quad - \\ - \quad - \end{matrix}\left|\begin{matrix} (-\rho_1-n, h_1, k_1), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}, (-r-\rho+n+\tfrac{1}{2}, h, k) \\ (-r-\rho-\rho_1-\tfrac{1}{2}, h+h_1k+k_1), \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\} \\ - \qquad - \qquad - \qquad - \\ - \qquad - \qquad - \qquad - \end{matrix}\right| x, y\right]\right\} \sin(2r+1)\theta \tag{3·2}$$

बशर्ते कि $R(\rho_1+h_1\alpha+k_1\beta+1)>0;\ 0\leqslant\theta\pi,\ r=0, 1, 2, \ldots$

उपपत्ति

(3·1) को सिद्ध करने के लिये, माना कि

$$*\ f(\theta)=\{(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}\ (\sin\tfrac{1}{2}\theta)\}^{2\rho_1}\ H[x\{(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2h}(\sin\tfrac{1}{2}\theta)\}^{2h_1},\ y\{(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2k}(\sin\tfrac{1}{2}\theta)\}^{2k_1}] \tag{3·3}$$

$$=\tfrac{1}{2}C_0+\sum_{p=1}^{\infty} C_p\cos p\theta$$

अब (5·3) को θ तथा π के मध्य की सीमाओं में θ के प्रति समाकलिन करने पर तथा परिणाम (2·3) का उपयोग करने पर C_0 प्राप्त होगा। पुन: (3·3) में दोनों ओर $\cos p\theta$ से गुणा करने, θ से π तक θ के प्रति समाकलित करने, (2·4) तथा कोज्या फलनों की लाम्बिकता का उपयोग करने पर

$$C_p=\frac{2}{\pi}\sum_{r=0}^{p}\frac{(-p)_r(-p+\frac{1}{2})_r}{(\frac{1}{2})_r\ r\,!}$$

$$\times H\left[\begin{matrix}\binom{m_1,\ 1+n_1}{2+p_1,\ 1+q_1}\\ -\quad -\\ -\quad -\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\frac{1}{2}-r-\rho_1,\ h_1,\ k_1),\ \{(a_{p_1},\ \alpha_{p_1},\ A_{p_1})\},\ (r-p-\rho+\frac{1}{2},\ h,\ k)\}\\ (-p-\rho-\rho_1,\ h+h_1,\ k+k_1)\{(b_{q_1},\ \beta_{q_1},\ B_{q_1})\}\\ -\qquad\qquad -\\ -\qquad\qquad -\end{matrix}\right|\ x,\ y\right] \tag{3·5}$$

बशर्ते कि $R(2\rho+2h\alpha+2k\beta+1)>0,\ R(2\rho_1+2h_1\alpha+2k_1\beta+1)>0;$ तथा $p=0, 1, 2, \ldots$

(3·4) में C_0 तथा C_p के मान रखने पर हमें फूरियर श्रेणी (3·1) प्राप्त होती है। फूरियर ज्या श्रेणी (3·2) को इसी प्रकार परिणाम (2·6) की सहायता से स्थापित किया जा सकता है।

विशिष्ट दशायें

(i) यदि हम (2·1) में $\rho_1=0$ रखें तो हाइपरज्यामितीय फलन ${}_3F_2$समानीत होकर ${}_2F_1$ हो जाता है। तब योगफल को ${}_2F_1(a, b, c; 1)=\Gamma(c)\ \Gamma(c-a-b)/\Gamma(c-a)\Gamma(c-b),\ R(c-a-b)>0$ द्वारा लिखा जाता है। और अधिक सरलीकरण पर यह

$$\int_0^{\pi}\cos p\theta(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}\ d\theta=\Gamma(2\rho+1)/2^{2\rho}\Gamma^*(\rho\pm p+1) \tag{4·1}$$

में समानीत हो जाता है बशर्ते कि $R(\rho)>-\frac{1}{2}$, तथा $p-0, 1, 2, \ldots$ जो मैकराबर्ट[6] का ज्ञात फल है।

* $f(0)$ के लिये डिरिक्लेट के प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं क्योंकि यह $\sin\theta$ तथा $\cos\theta$ का फलन है।

(ii) (2·1) में $\rho=0$ रखने पर तथा ऊपर की भाँति अग्रसर होने पर

$$\int_0^\pi \cos p\theta(\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1}\, d\theta = \Gamma(2\rho_1+1)\Gamma_*(\tfrac{1}{2}\pm p)/2^{2\rho_1}\Gamma_*(\rho_1\pm p+1) \tag{4·2}$$

बशर्ते कि $R(\rho_1)>-\frac{1}{2}$, तथा $p=0, 1, 2, \ldots$ जो स्नेडन[11] का ज्ञात फल है ।

(iii) $\rho=0$ तथा $\rho_1=\frac{1}{2}-\rho'$, रखने पर (2·2)

$$\int_0^\pi \sin\,(2r+1)\theta(\sin\,\theta)^{1-2\rho'}\, d\theta = \Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma\Big(\frac{3}{2}-\rho'\Big)\Gamma(\rho'+r)/\Gamma(\rho')\Gamma(2-\rho'+r) \tag{4·3}$$

में समानीत होता है बशर्ते कि $R(3-2\rho')>0$ तथा $r=0, 1, 2, \ldots$ जो मैकराबर्ट[6] का फल है ।

(iv) (2·4) में $\rho_1=h_1=k_1=0$, $m_1=0$ रखने पर तथा गामा फलन के द्वितयी सूत्र का प्रयोग करने पर कौल[4] का फल प्राप्त होता है, अर्थात्

$$\int_0^\pi \cos p\theta(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}\, H[x(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2h}, y(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2k}]\, d\theta$$

$$=2^{-2\rho}\pi\ H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}0, & 1+n_1\\ 1+p_1, & 2+q_1\end{pmatrix}\\ - \quad -\\ - \quad -\end{matrix}\left|\begin{matrix}(-2\rho, 2h, 2k),\ \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}\\ (-\rho\pm p, h, k),\ \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\}\\ - \qquad -\\ - \qquad -\end{matrix}\right|\ \frac{x}{4^h}, \frac{y}{4^k}\right]$$

बशर्ते कि $R(2\rho+2h\alpha+2k\beta+1)>0$ तथा $p=0, 1, 2, \ldots$

(v) यदि हम (2·4) में $\rho_1=h_1=k_1=k=0$ तथा $\rho=h=k=k_1=0$, $\rho_1=-\rho'$, $h_1=-h'$ मानें तो हमें कौल[4] का फल प्राप्त होता है अर्थात्

$$\int_0^\pi \cos p\theta(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}\, H[x(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2h}, y]\, d\theta$$

$$=2^{-2\rho}\pi\ H\left[\begin{matrix}- \quad -\\ \begin{pmatrix}m_2, & 1+n_2\\ 1+p_2, & 2+q_2\end{pmatrix}\\ - \quad -\end{matrix}\left|\begin{matrix}- \qquad -\\ (-2\rho, 2h),\ (c_{p_2}, \gamma_{p_2})\\ (d_{q_2}, \delta_{q_2}),\ (-\rho\pm p, h)\\ - \qquad -\end{matrix}\right|\ \frac{x}{4^h}, y\right]$$

बशर्ते कि $R(2\rho''+2h+1)>0$

तथा $$\int_0^\pi \cos p\theta(\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{-2\rho'}\, H[x(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{-2h}, y)]\, d\theta$$

$$=\Gamma(\tfrac{1}{2})\, H\left[\begin{matrix} - & - \\ \binom{1+m_2,\ 1+n_2}{2+p_2,\ 2+q_2} \\ - & - \end{matrix}\left|\begin{matrix} - & - & - \\ (1-\rho'-p, h')\{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\}, (1-\rho'+p, h) \\ (\tfrac{1}{2}-\rho', h'), \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\}, (1-\rho', h') \\ - & - & - \end{matrix}\right| x, y\right]$$

बशर्ते कि $Re\ (\rho'+h'a)<\tfrac{1}{2}$

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइं० इंडिया**, 1965, **31**, 536
2. बाजपेयी, एस० डी०, **प्रोसी० कैम्ब्रि० फिला० सोसा०**, 1967, 65, 703
3. कौल, सी० एल०, Education India, 1970, **4**, 40
4. वही, **प्रोसी० इंडियन एके० साइंस**, 1972, **75**, 29
5. केसरवानी, आर० एन०, Composito Maths, 1966, **17**, 14
6. मैकराबट, टी० एम०, **वही**, 1961, **15**, 79
7. वही, Maths. Z., 1959, **71**, 143
8. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, **प्रोसी० इंडि० एके० साइंस**, 1973, **75**, 1
9. पराशर, बी० पी०, **प्रोसी० कैम्ब्रि० फिला० सोसा०**, 1967, **63**, 7083
10. शाह, एम० एल०, **इंडियन जर्न० प्योर० एण्ड एप्लाइड मैथ०**, 1971, **2**, 464
11. स्नेडान, आई० एन०, Special functions of Mathematical Physics and Chemistry **इण्टरसाइंस पब्लिशर्स**, न्यूयार्क, 1956, पृ० 41

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 4, October, 1976, Pages 311-317

$Cis\text{-}Co(NH_3)_4H_2OCl^{2+}$ के अवकरण की गतिकी एवं क्रियाविधि का अध्ययन

कुसुम कुमारी, शिव प्रकाश, कृष्ण स्वरूप द्विवेदी एवं रणञ्जय सिंह
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—अप्रैल 17, 1976]

सारांश

Fe(II) द्वारा $Cis\text{-}Co(NH_3)_4H_2OCl^{2+}$ के अवकरण की कोटि का अध्ययन रंगमापीय विधि द्वारा किया गया है। प्रत्येक अभिकारक के सापेक्ष अभिक्रिया की कोटि एक है। छद्म प्रथम कोटि स्थिरांक (k_1) का मान 20° से० पर $54{\cdot}5\times10^{-3}$, 25° से० पर $80{\cdot}1\times10^{-3}$ तथा 30° से० पर 11.02×10^{-2} मिनट$^{-1}$ है। $\triangle E$, $\triangle H^{\neq}$ एवं $\triangle S^{\neq}$ के मान क्रमशः 12·49 कि० कै०, 11·88 कि० कै० तथा −62·47 कैलारी प्रति अंश प्रति मोल पाए गए। अभिक्रिया की प्रस्तावित क्रियाविधि दी गई है।

Abstract

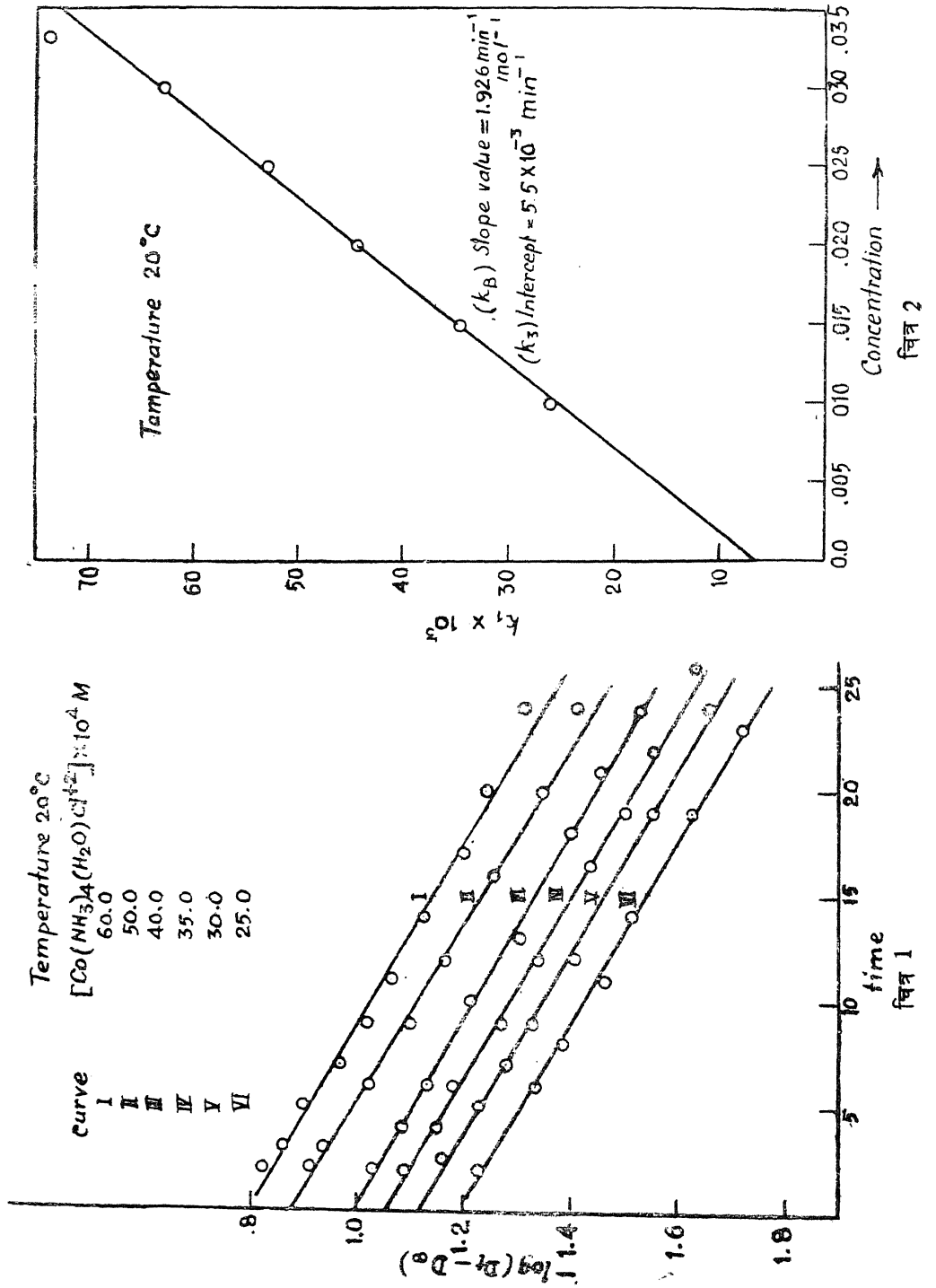
Study of kinetics and mechanism of reduction of cis-$Co(NH_3)_4H_2OCl^{2+}$. *By* Kusum Kumari, Sheo Prakash, Krishna Swarup Dwivedi and Rananjai Singh, Chemistry Department, University of Allahabad.

The rate of reduction of cis-$Co(NH_3)_4H_2OCl^{2+}$ by Fe(II) has been investigated colorimetrically. The order of reaction with respect to each reactant is unity. The pseudo-first order rate constant (k_1) is $54{\cdot}5\times10^{-3}$ at 20°C, $80{\cdot}1\times10^{-3}$ and $11{\cdot}02\times10^{-2}$ min^{-1} at 30°C. The values of $\triangle E$, $\triangle H^{\neq}$ and $\triangle S^{\neq}$ have been found to be 12·49 Kcal mole^{-1}, 11·88Kcal mole^{-1} and $-62{\cdot}47$ cal. deg^{-1} mole^{-1}. The mechanism of the reaction has been suggested.

कोबाल्ट के पेन्टामीन एवं हेक्सामीन जटिलों के अवकरण का विस्तृत अध्ययन [1-12] तो किया जा चुका है किन्तु कोबाल्ट के टेट्रामीन जटिलों का अध्ययन बहुत ही थोड़े वैज्ञानिकों[13-18] ने किया है। प्रस्तुत कार्य फेरस आयन द्वारा मोनोक्लोरो मोनोएक्वोटेट्रामीन कोबाल्ट (III) क्लोराइड के अवकरण की गतिकी एवं क्रियाविधि से सम्बन्धित है।

Temperature 20°C
curve
[Co(NH3)4(H2O)Cl+2] × 10⁴ M
I 60.0
II 50.0
III 40.0
IV 35.0
V 30.0
VI 25.0
log (Dt – D8)
.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
5
10
15
20
25
time
Tamperature 20°C
(kB) Slope value = 1.926 min⁻¹ mol⁻¹ l
(k3) Intercept = 5.5 X 10⁻³ min⁻¹
k1 x 10³
10
20
30
40
50
60
70
0.0
.005
.010
.015
.020
.025
.030
.035
Concentration →

चित्र 1

चित्र 2

प्रयोगात्मक

कार्बोनिटोटेट्रामीन कोबाल्ट (III) क्लोराइड के निर्माण हेतु BDH(AR) अमोनियम कार्बोनेट, द्रव अमोनिया तथा कोबाल्टस क्लोराइड का तथा मोनोक्लोरो मोनोएक्वोटेट्रामीन कोबाल्ट (III) क्लोराइड के निर्माण हेतु BDH(AR) हाइड्रोक्लोरिक अम्ल प्रयुक्त किया गया। मोनोक्लोरो-मोनोएक्वोटेट्रामीन कोबाल्ट (III) क्लोराइड के अवकरण के लिए ई० मर्क (GR) फेरस सल्फेट प्रयोग में लाया गया।

कार्बोनिटोटेट्रामीन कोबाल्ट (III) क्लोराइड जारगेन्सन[19] विधि द्वारा तैयार किया गया। मोनोक्लोरोमोनोएक्वोटेट्रामीन कोबाल्ट (III) क्लोराइड हाइड्रोक्लोरिक अम्ल की क्रिया[20] द्वारा तैयार किया गया।

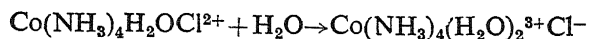
प्रत्येक बार प्रयोग करने से पहिले फेरस सल्फेट का ताजा विलयन बनाया गया। यह विलयन पोटैशियम डाइक्रोमेट के प्रामाणिक विलयन की सहायता से N-फेनिल ऐन्थ्रेनिलिक अम्ल को सूचक की तरह प्रयोग करके प्रामाणिक बनाया गया।

अभिक्रिया की गति जानने के लिए रंगमापी विधि से विभिन्न समयों पर विलयन के प्रकाशीय घनत्व की माप की गई।

परिणाम तथा विवेचना

ट्रांस-$Co(NH_3)_4H_2OCl^{2+}$ का अवकरण सिस-समावयव के अवकरण से तीव्र होता है[17]। सभी प्रयोग Fe(II) की विभिन्न सांद्रताओं पर किए गए। प्रत्येक दशा में अभिक्रिया के छद्म प्रथम कोटि के निश्चयन हेतु Fe(II) को सांद्रता अधिक रखी गई। छद्म-प्रथम कोटि स्थिरांक (k_1) का मान निकालने के लिए $-\log(D_t-D\infty)$ और समय (t) में आलेख खींचा गया (चित्र 1) जिसमें प्रारम्भ में तीव्र ढाल पाया गया। अवकारक की उपस्थिति में सिस एवं ट्रांस समावयवों के बीच साम्य नहीं रह जाता है और एक नया साम्य स्थापित होता है अतः वक्र का प्रारम्भिक भाग सिस एवं ट्रांस दोनों समावयवों का अवकरण दर्शाता है जबकि वक्र के बाद का भाग केवल सिस-समावयव का ही अवकरण प्रदर्शित करता है। प्रस्तुत शोध पत्र में प्रारम्भ में कम पाठों के कारण ट्रांस समावयवों के अवकरण का अध्ययन करना सम्भव नहीं हो सका है।

सिस-ट्रांस समावयवता के अतिरिक्त विलयन में जटिल का धीरे-धीरे एक्वीकरण (aquation) होता है—

$$Co(NH_3)_4H_2OCl^{2+}+H_2O \rightarrow Co(NH_3)_4(H_2O)_2^{3+}Cl^-$$

परन्तु ऊपर दी हुई अभिक्रिया अम्लों की उस्थिति में अत्यन्त धीमी गति से होती है तथा अन-एक्वीकृत जटिल की तुलना में एक्वीकृत जटिल बहुत ही कम क्रियाशील होता है। अतः यह विलयन में ज्यों का त्यों उपस्थित रहता है और इसलिए D_∞ में से D_t घटा कर मान निकाला जाता है[21]।

उपर्युक्त ढंग से 20°, 25° एवं 30° से० पर निकाले गए वेग स्थिरांकों का मान सारणी 1 में अंकित है। छद्म-प्रथम कोटि स्थिरांकों का मान Fe(II) के प्रारम्भिक सांद्रण पर निर्भर करता है परन्तु मोनोक्लोरोमोनोएक्वोअमीन कोबाल्ट (III) की प्रारम्भिक सांद्रता पर निर्भर नहीं करता। प्रत्येक अभिकारक के सापेक्ष अभिक्रिया की कोटि एक पाई गई। छद्म-प्रथम कोटि स्थिरांक का Fe(II) के

सारणी 1

$Fe(II) = 25 \times 10^{-3}$M [HCl]=0·5 M

10^4[Co(III)]M	$k_1 \times 10^3$ min^{-1} 20° से० पर	$k_1 \times 10^3$ min^{-1} 25° से० पर	$k_1 \times 10^2$ min^{-1} 30° से० पर
60·0	55·70	79·0	10·89
50·0	55·27	80·6	10·98
40·0	52·24	80·6	11·09
35·0	53·74	79·4	10·98
30·0	55·27	80·4	11·15
25·0	54·54	80·5	11·04
माध्य	54·5	80·1	11·02

सांद्रण के विरुद्ध आलेख खींचने पर एक सीधी रेखा प्राप्त होती है जो y-अक्ष पर अंतःखण्ड काटती है। यही अंत.खण्ड सिस-एवं ट्रांस समावयवीकरण स्थिरांक k_B का मान देती है। इससे पता चलता है कि सिस-$Co(NH_3)_4H_2OCl^{2+}$ का अवकरण दो प्रकार से होता है : एक में तो सिस-समावयव का सीधा अवकरण होता है। दूसरे में सिस का ट्रांस में समावयवीकरण होता है जिसका कि शीघ्र ही अवकरण हो जाता है (चित्र 2)। सिस-समावयवीकरण स्थिरांक का मान $5·5 \times 10^{-3}$ मिनट$^{-1}$ पाया गया। (चित्र पिछले पृष्ठ पर देखें)

सारणी 2

[Co(III)]=$50·0 \times 10^{-4}$ M, [HCl]=0·50 M, ताप 20° से०

10^3[Fe(II)]M	$k_1 \times 10^3$ min^{-1}	$k_B = \frac{k_1 - k_3}{[Fe(II)]}$ min^{-1} mol^{-1}
10·0	26·5	2·08
15·0	34·5	1·933
20·0	44·5	1·950
25·0	54·7	1·960
30·0	63·3	1·926
35·0	74·8	1·980
	माध्य	1·968

सारणी 3 में वेग स्थिरांकों के वे मान दर्शाये गए हैं जो Na_2SO_4, $ZnSO_4$ तथा NaCl की उपस्थिति में प्रयोग करने पर पाए गए। स्पष्ट है कि इन लवणों की सांद्रता बढ़ाने पर वेग स्थिरांकों के मानों में वृद्धि पाई जाती है। Na_2SO_4 तथा $ZnSO_4$ के साथ मान लगभग एक से हैं जब कि NaCl की उपस्थिति में ये मान कम हैं और यह कमी NaCl की उच्च सांद्रता पर विशेष रूप से प्रकट होती है।

सारणी 3

$[Co(NH_3)_4(H_2O)Cl^{2+}]=50{\cdot}0\times10^{-4}M$,

$[Fe^{2+}]=25{\cdot}0\times10^{-3}M$ $[HCl]=0{\cdot}5$ M, 20° से०

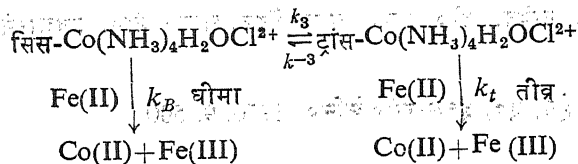
सांद्रता मोल/लीटर	$k_1\times10^3$		
	Na_2SO_4	$ZnSO_4$	NaCl
0·00	54·5	54·8	54·2
0·02	55·9	56·1	57·96
0·03	60·0	...	...
0·04	63·0	59·1	59·06
0·06	69·1	64·3	60·00
0·08	71·56	69·1	61·5
0·10	75·5	72·9	63·77

सक्रियकरण ऊर्जा $\triangle E$, एन्थाल्पी $\triangle H^{\neq}$ एवं सक्रियकरण की एन्ट्रापी $\triangle S^{\neq}$ का परिकलन भी किया गया है। वेग स्थिरांकों के लघुगणक को (1/T) के विरुद्ध आलेखित करके E का मान और $-\log\frac{k_r h}{kT}$ को $\frac{1}{T}$ के विरुद्ध आलेखित करके $\triangle H^{\neq}$ और $\triangle S^{\neq}$ का मान ज्ञात किया गया। इस वक्र की प्रवणता से $\triangle H^{\neq}$ का मान तथा अंतःखण्ड से $\triangle S^{\neq}$ का मान ज्ञात होता है। $\triangle E$, $\triangle H^{\neq}$ और $\triangle S^{\neq}$ के मान क्रमशः 12·49 कि० कैलारी मोल$^{-1}$, 11·88 कि० कैलारी मोल$^{-1}$ तथा $-62{\cdot}47$ कैलारी अंश$^{-1}$ मोल$^{-1}$ हैं।

कोबाल्ट (III) जटिल तथा फेरस आयन में अभिक्रिया निम्न ढंग से दर्शाई जा सकती है—

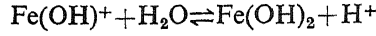
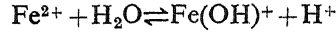
$$\text{सिस-}Co(NH_3)_4H_2OCl^{2+} \underset{k_{-3}}{\overset{k_3}{\rightleftharpoons}} \text{ट्रांस-}Co(NH_3)_4H_2OCl^{2+}$$

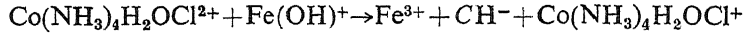
$$\text{Fe(II)}\downarrow k_B \text{ धीमा} \qquad\qquad \text{Fe(II)}\downarrow k_t \text{ तीव्र}$$

$$Co(II)+Fe(III) \qquad\qquad Co(II)+Fe(III)$$

गतिकी की दृष्टि से पश्च क्रिया स्थिरांक k_{-3} महत्वपूर्ण नहीं है क्योंकि ट्रांस-जटिल द्वारा ग्राक्सीकरण की क्रिया काफी तीव्र होती है।

यह सम्भव है कि Fe(II) का जल अपघटन हो। निम्न दो साम्य सम्भव हैं और उनमें से दूसरा साम्य अम्लीय माध्यम में विद्यमान होगा :

$$Fe^{2+} + H_2O \rightleftharpoons Fe(OH)^{+} + H^{+}$$

$$Fe(OH)^{+} + H_2O \rightleftharpoons Fe(OH)_2 + H^{+}$$

इस प्रकार जटिल से क्रिया होने पर Fe^{3+} बनता है :

$$Co(NH_3)_4H_2OCl^{2+} + Fe(OH)^{+} \rightarrow Fe^{3+} + CH^{-} + Co(NH_3)_4H_2OCl^{+}$$

सिस से ट्रांस में बदलने के साम्य पर भी अभिक्रिया का दर निर्भर करेगा।

निर्देश

1. पारकर, ग्रो० जे०, तथा इपेन्सन, जे० एच०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1964, **91**, 1968.
2. इपेन्सन, जे० एच० तथा बर्क, जे० पी०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1965, 87, 3280.
3. लिंक, आर० जी०, **इनआरगै० केमि०**, 1970, **9**, 2529.
4. गुन्थर, पी० ग्रार० तथा लिंक, आर० जी०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1969, **91**, 3769.
5. पटेल, आर० सी० तथा एन्डीकाट, जे० एफ०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1968, **90**, 6364,
6. इपेन्सन, जे० एच०, **इनआरगै० केमि०**, 1965, **4**, 121.
7. डिबलर, एच० तथा तोबे, एच०, **वही**, 1965, **4**, 1029.
8. कैंडलिन, जे० पी० तथा हाल्पर्न, जे०, **इनआरगै० केमि०**, 1165, **4**, 766.
9. कैंडलिन, जे० पी०, हाल्पर्न, जे० तथा त्रिम, डी० एल०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1964, **86**, 1019,
10. एन्डीकोल्ट, जे० एफ० तथा तोबे, जे० एच०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1964, **86**, 1186.
11. इपेन्सन, जे० एच० तथा वांग, ग्रार० टी०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1971, **93**, 380.
12. पारकर, ओ० जे० तथा इपेन्सन, जे० एच०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1969, **91**, 1968.
13. हिक्स, के० डब्लू०, टापेन, डी० एल० तथा लिंक, ग्रार० जी०, **इनआरगै० केमि०**, 1972 **11, 310.**
14. कारडेला, एच०, तथा हेन, ए०, **इनआरगै० केमि०**, 1970, **9**, 500.

15. हरबर्ट, एम० तथा गोर्डीमेर, जी०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1970, **92**, 7532.

16. कैंडलिन, जे पी०, तथा हाल्पर, जे०, **इनआरगै० केमि०**, 1965, **4**, 1086.

17. हेम, ए०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1964, **86**, 2353.

18. कोपले, के० डी० तथा मिलर, आर० आर०, **प्रोसी० केमि० सोसा०**, 1963, 306.

19. A Comprehensive Treatise on Inorganic and Theoretical Chemistry. मेलर, जे० डब्लू० 1935, **14**, 816 (लांगमैन्स, ग्रीन एन्ड कं० लंदन)

20. वही, **वही**, पृष्ठ 666.

21. कोसाबूरो, ओ०, **बुले० केमि० सोसा० जापान**, 1972, **45**(3), 947.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 4, October, 1976, Pages 319-323

दो चरों वाले H-फलन-II

वी० बी० एल० चौरसिया
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरी कालेज, जयपुर

[प्राप्त—मार्च 31, 1976]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य दो चरों वाले H-फलन सम्बन्धी समाकल प्राप्त करना और इसका उपयोग कतिपय प्रसार सूत्रों की स्थापना करना है। ये फल होरा[2] द्वारा दिये गये फलों के सार्वीकरण हैं।

Abstract

On the H-function of two variables-II. *By* V. B. L. Chaurasia, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur.

The aim this present paper is to obtain an integral involving H-function of two variables and employ it to establish some expansion formulae for the H-function of two variables. The results are the generalzations of the results given in [2].

1. प्रस्तावना

मित्तल तथा गुप्ता[3] द्वारा प्रचलित दो चरों वाले H-फलन को निम्न प्रकार से प्रदर्शित एवं परिभाषित किया जावेगा:

$$H(z_1, z_2) \equiv H^{1, (m, n), (M, N)}_{s, (p, q), t, (P, Q)} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \\ z_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a_s, A_s, R_s) : (c_p, C_p); (e_P, E_P) \\ \\ (b_t, B_t, L_t) : (d_q, D_q); (f_Q, F_Q) \end{matrix} \right]$$

$$= (2\pi i)^{-2} \int_L \int_{L'} \theta(y, z) \phi_1(y) \phi_2(z) z_1^y z_2^z \, dy \, dz,$$

जहाँ
$$\theta(y, z) = \frac{\prod_{i=1}^{1} \Gamma(1 - a_i + A_i y + R_i z)}{\prod_{i=l+1}^{s} \Gamma(a_i - A_i y - R_i z) \prod_{i=1}^{t} \Gamma(1 - b_i + B_i y + L_i z)}$$

$$\phi_1(y)=\frac{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(d_i-D_iy)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1-c_i+C_iy)}{\prod_{i=m+1}^{q}\Gamma(1-d_i+D_iy)\prod_{i=n+1}^{p}\Gamma(c_i-C_iy)}$$

$$\phi_2(z)=\frac{\prod_{i=1}^{M}\Gamma(f_i-F_iz)\prod_{i=1}^{N}\Gamma(1-e_i+E_iz)}{\prod_{i=M+1}^{Q}\Gamma(1-f_i+F_iz)\prod_{i=N+1}^{P}\Gamma(e_i-E_iz)}$$

z_1, z_2 शून्य के तुल्य नहीं हैं तथा रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है। $l, s, t, m, n, p, q, M, N, P$ तथा Q ऐसी अनृण संख्यायें हैं कि

$$0\leqslant 1\leqslant s,\ t\geqslant 0,\ 0\leqslant m\leqslant q,\ 0\leqslant n\leqslant p,\ 0\leqslant M\leqslant Q,\ 0\leqslant N\leqslant P$$

तथा A, B, C, D, E, E, R तथा L ये सभी अक्षर धन हैं।

कंटूर L तथा L' को उपयुक्त परिभाषित किया जाता है और समाकल्य के पोलों को सरल मान लिया जाता है।

फलन $H(z_1, z_2)$ के द्वारा वैश्लेषिक फलन प्रदर्शित होने के प्रतिबन्ध तथा (1·1) में समाकल के अभिसारी होने के प्रतिबन्ध मित्तल तथा गुप्ता [3, p. 119 प्रतिबन्ध (i)—(vi)] ने दिये हैं।

समग्र प्रपत्र में यह मान लिया है कि ये प्रतिबन्ध इस प्रपत्र में आये दो चरों वाले H-फलन द्वारा तुष्ट होते हैं। (a_p, A_p, R_p) से अनुक्रम $(a_1, A_1, R_1), \ldots, (a_p, A_p, R_p)$ का बोध कराया गया है।

2. समाकल

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{w-1}P_v^u(x)\,H(z_1(1-x^2)^h, z_2(1-x^2)^k)\,dx$$

$$=\frac{\pi 2^u}{\Gamma\left(\frac{2-u+v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-u-v}{2}\right)}$$

$$\times H^{1+2,\ (m,\ n),\ (M,\ N)}_{s+2,\ (p,\ q),\ t+2,\ (P,\ Q)}\left[\begin{matrix}z_1\\ \\ z_2\end{matrix}\left|\begin{matrix}(1-w\pm u/2, h, k), (a_s, A_s, R_s) : (c_p, C_p); (e_P, E_P)\\ (b_t, B_t, L_t), (-w-v/2, h, k), (1-w+v/2, h, k) :\\ (d_q, D_q); (f_Q, F_Q)\end{matrix}\right.\right], \tag{2·1}$$

जहाँ $2R_e(w+hd_i/D_i+kf_j/F_j)>|R_e u|,\ i=1, \ldots, m; j=1, \ldots, M$.

उपपत्ति

(2·1) को सिद्ध करने के लिये हम (1·1) में से द्विगुण मेलिनबार्नीज समाकल को (2·1) के समाकल्य में आये फलन के स्थान पर रखते हैं। समाकलन का क्रम विनिमय करते हैं, ग्रान्तरिक समाकल का मान ज्ञात फल [1, p. 316 (16)] की सहायता से निकालते हैं और इस प्रकार से प्राप्त समाकल की व्याख्या (1·1) की सहायता से करते हैं।

3. प्रसार सूत्र

$$(1-x^2)^{w-1} H(z_1(1-x^2)^h, z_2(1-x^2)^k)$$

$$=\pi^{2u-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r-u)!\,(2r+1)}{(r+u)!\,\Gamma\frac{(2-u+r)}{2}\Gamma\frac{(1-u-r)}{2}}$$

$$\times H^{1+2,\ (m,\ n),\ (M,\ N)}_{s+2,\ (p,\ q),\ t+2,\ (P,\ Q)} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \\ z_2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} (1-w\pm u/2, h, k), (a_s, A_s, R_s): (c_p, C_t); (e_P, E_P) \\ (b_t, B_t, L_t), (-w-r/2, h, k), (1-w+r/2, h, k): \\ (d_q, D_q); (f_Q, F_Q) \end{matrix} \right.\right] P^u_r(x), \tag{3·1}$$

(2·1) में दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

$$(1-x^2)^{w} H(z_1(1-x^2)^h. (z_2(1-x^2)^k)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} \frac{2^r r(v-r)!\,\pi}{(v+r)!\,\Gamma\left(\frac{2-r+}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-r-v}{2}\right)} P^r_v(x)$$

$$\times H^{1+2,\ (m,\ n),\ (M,\ N)}_{s+2,\ (p,\ q),\ t+2,\ (P,\ Q)} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \\ z_2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} (1-w\pm r/2, h, k), (a_s, A_s, R_s) : (c_p, C_p): (e_P\ E_P) \\ (b_t, B_t, L_t), (-w-v/2, h, k), (1-w+v/2, h, k) \\ (d_q, D_q); (f_Q, F_Q) \end{matrix} \right.\right], \tag{3·2}$$

(2·1) में दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

$$(1-x^2)^{w-1} F^{m,\ n}_{p,\ q} \left[\begin{matrix} a_m : b_n, b'_n \\ \\ c_p : d_q, d'_q \end{matrix} \left| z_1(1-x^2)^h, z_2(1-x^2)^h \right.\right]$$

$$=\frac{\pi 2^{u-1}}{h}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(v-u)!\,(2v+1)\prod_{i=0}^{h-1}\Gamma(w\pm u/2+i)/h}{(v+u)!\frac{\Gamma(2-u+v)}{2}\Gamma\left(\frac{1-u-v}{2}\right)\prod_{i=0}^{h-1}\Gamma\left(\frac{w+1+v/2+i}{h}\right)\prod_{i=0}^{h-1}\Gamma\left(\frac{w-v/2+i}{h}\right)}$$

$$\times F^{m+2h,\,n}_{p+2h,\,q}\left[\begin{matrix}a_m,\,(w\pm u/2+i)/h : b_n,\,b'_n\\ c_p,\,(w+1+v/2+i)h,\,(w-v/2+i)/h : d_q,\,d'_q\end{matrix}\middle|\, z_1,\,z_2\right] P^u_v(x), \qquad (3\cdot3)$$

जहाँ $2R_e\, w > |\, R_e\, u\,|,\ p+q<m+n+1,\ |\arg z_1\,|<(m+1-p-q)\pi/2;$

$|\arg z_2\,|<(m+n+1-p-q)\pi/2,\ h>0.$

$$(1-x^2)^w\, ;\, F^{m,\,n}_{p,\,q}\left[\begin{matrix}a_m : b_n,\,b'_n\\ c_p : d_q,\,d'_q\end{matrix}\middle|\, z_1(1-x^2)^h,\ z_2(1-x^2)^h\right]$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{2^r r(v-r)!\pi\prod_{i=0}^{h-1}\Gamma(w\pm r/2-i)/h}{h(v+r)!\,\frac{\Gamma(2-r+v)}{2}\frac{\Gamma(1-r-v)}{2}\prod_{i=0}^{h-1}\frac{\Gamma(w+1+v/2+i)}{h}\prod_{i=0}^{h-1}\frac{\Gamma(w-v/2+i)}{h}}$$

$$\times F^{m+2h,\,n}_{p+2h,\,q}\left[\begin{matrix}a_m,\,\frac{w\pm r/2+i}{h} : b_n,\,b'_n\\ c_p,\,\frac{w+1+v/2+i}{h},\,\frac{w-v/2+i}{h} : d_q,\,d'\end{matrix}\middle|\, z_1,\,z_2\right] P^r_v(x), \qquad (3\cdot4)$$

(3·3) में दिये हुये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है ।

$F^{m,\,n}_{p,\,q}\left[z_1,\,z_2\right]$ एक बहुज्ञात कैम्पे-द-फेरी फलन[4] है ।

(3·1) तथा (3·2) के फलों को (2·1) तथा (2·2) की सहायता से होरा[2] द्वारा दी गई प्रविधि से स्थापित किया जा सकता है जबकि (3·3) तथा (3·4) के फलों को (3·1) तथा (3·2) में दिये गये प्राचलों के विशिष्टीकरण द्वारा प्राप्त किया जा सकता है ।

विशिष्ट दशायें

हम देखते हैं कि (3·1), (3·2), (3·3) तथा (3.4) सूत्रों की विशिष्ट दशायें प्राचलों के विशिष्टीकरण से प्राप्त होती हैं जिन्हें होरा[2] ने हाल ही में दिया है ।

हमरे फलों की अन्य कई रोचक विशिष्ट दशायें प्राप्त की जा सकती हैं ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, **भाग II, मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1954
2. होरा, एन० एस०, **विज्ञान परि० अनु० पत्रिका**, 1975, **18**, 47-55
3. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस**, 1972, **75**, 117-123
4. **कैम्पे-द फेरी तथा ऐपेल, पी०**, Functions Hypergéométriques et Hypérspheriques, **ग्राथियर-विलर्स पेरिस** 1926,

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 4, October, 1976, Pages 325-329

धातु अर्धचालक प्रकार के स्पर्शों के धारा-वोल्टता लक्षणों पर दाब का प्रभाव

विपिन कुमार तथा राम परशाद
राष्ट्रीय भौतिक प्रयोगशाला, नई, दल्ली

[प्राप्त—मई 17, 1976]

सारांश

धातु-अर्धचालक स्पर्शों के धारा-वोल्टता लक्षणों में एकाक्षीय दाब निर्भरता के कारणों पर विचार करते हुए अर्धचालक पृष्ठ अवस्थाओं के लिए विभिन्न वर्तमान सिद्धान्तों को प्रायोगिक अवलोकनों की व्याख्या के लिए उपयोग करने का प्रयत्न किया गया है।

Abstract

The effect of pressure on current voltage characteristics of metal semiconductor-like contacts. *By* Bipin Kumar and Ram Parshad, National Physical Laboratories, New Delhi.

The reasons for the effect of uniaxial presssure on current-voltage characteristics of metal-semiconductor-like contacts have been considered. It has been tried to use different existing theories on semiconductor surface states to explain the experimental observations.

पूर्व प्रपत्र में [1] यांत्रिक धातु-अर्धचालक स्पर्शों के धारा-वोल्टता लक्षणों पर दाब के प्रभाव का प्रायोगिक अध्ययन किया गया था। इस प्रपत्र में दाब के प्रभाव की व्याख्या के लिए इस कल्पना पर केन्द्रित किया गया था कि धातु तथा अर्धचालक के बीच यांत्रिक आकाश की मोटाई दाब लगाने से कम हो जाती है। साथ ही, अर्धचालक पृष्ठ पर बनी ऑक्साइड की नैसर्गिक परत कीं मोटाई भी दाब बढ़ने पर कम होती है। इस प्रकार यह संभावना व्यक्त की गई थी कि ऑक्साइड परत तथा यांत्रिक आकाश की मोटाई कुल मिलाकर इतनी होती है कि दाब लगाने पर उसमें से इलेक्ट्रॉन का वहन सुरंगीकरण प्रक्रिया द्वारा होने लगता है जो दाब बढ़ाने पर अधिक हो जाता है। इसके अतिरिक्त यह प्रायोगिक

अवलोकन भी दिया गया था कि अर्धचालक की प्रतिरोधिता कम करने पर धातु-अर्धचालक स्पर्श, अपेक्षाकृत कम दाब लगाने पर ही ओमिक बन जाते हैं।

वर्तमान पत्र में इन सभी प्रायोगिक तथ्यों की अन्य संभावित व्याख्याएँ की गई हैं। विभिन्न संभावनाएँ निम्न शृंखला में व्यक्त की गई हैं :—

1. दाब-प्रतिरोध पर पृष्ठ का प्रभाव।

2. ताप तथा दाब का पृष्ठ अवस्थाओं पर प्रभाव।

3. अशुद्धि सांद्रता का पृष्ठ अवस्था स्थानीकरण पर प्रभाव।

4. पृष्ठ जालक स्थिरांक का पृष्ठ अवस्था स्थानीकरण पर प्रभाव।

5. पृष्ठ अवस्थाओं में लघु-परास-विभव पर दाब का प्रभाव।

1. दाब के धातु-अर्धचालक स्पर्शों पर असामान्य प्रभाव के लिए यह आशंका कर सकते हैं कि अर्धचालक पृष्ठ पर दाब-जनित-प्रतिरोध, समष्टि में दाब-प्रतिरोध की अपेक्षा अधिक हो। लेकिन इस धारणा को सोचान्सकी इत्यादि[2] ने गलत बताया है और सैद्धान्तिक रूप में सिद्ध किया है कि पृष्ठ पर दाब-प्रतिरोध, समष्टि में दाब-प्रतिरोध के लगभग बराबर है।

2. दूसरी संभावना यह कि दाब का प्रभाव पृष्ठ अवस्थाओं के कारण है। पृष्ठ अवस्थाएँ तीन प्रकार से कार्य कर सकती हैं :—

(अ) पाश-केन्द्र की तरह, जिनमें वाहक बद्ध अवस्था में हैं और जो धारा-संचालन में योगदान नहीं देते। ऐसे केन्द्र उपस्थित होने की संभावना अर्धचालक पृष्ठ पर फर्मी तल के नीचे अधिक है।

(ब) पुनर्मिलन केन्द्र की तरह, जो इलेक्ट्रान-छिद्र के पुनर्मिलन के लिए एक माध्यम की तरह कार्य करता है। यह केन्द्र धारा-संचालन में योगदान देता है। ऐसे केन्द्रों की उपस्थिति की संभावना अर्धचालक पृष्ठ के फर्मी तल के आसपास अधिक है। ऐसे केन्द्रों को हम अर्धपूरित अवस्थाएँ भी कह सकते हैं।

(स) सामान्य-अवस्था केन्द्र जिन्हें अपूरित अवस्थाएँ भी कह सकते हैं। ऐसी अवस्थाओं की उपस्थिति की संभावना धारा-वाहक पट्ट (जैसे चालकता या संयोजकता पट्ट) के अग्रों के निकट अधिक हैं। ऐसे केन्द्रों के साथ जुड़े वाहक समष्टि पट्टों तक पहुँच रखते हैं और इस प्रकार सामान्य अवस्था केन्द्रों को समष्टि पट्टों के साथ अतिव्यापी अवस्था में कहा जा सकता है। इस प्रकार के केन्द्र पुनर्मिलन के लिए कार्य कहीं करते बल्कि यह धातु से अर्धचालक में सुरंगीकरण प्रक्रिया द्वारा प्रवाहित वाहकों के समष्टि पट्टों तक पहुँचने के लिए एक माध्यम का काम करते हैं।

ताप का प्रभाव : यह परिकल्पना कर सकते हैं कि तापमान कम करने पर अतिव्यापी केन्द्र (स) पुनर्मिलन केन्द्रों (ब) में, तथा पुनर्मिलन केन्द्र (ब), पाश-केन्द्रों (अ) में परिवर्तित हो जाएँगे क्योंकि ऐसे पृष्ठ अवस्था केन्द्रों से जुड़े इक्लेट्रॉनों की ताप ऊर्जा कम हो जाएगी।

दाब का प्रभाव : इसी प्रकार यह मान सकते हैं कि दाब बढ़ाने पर पाश केन्द्र (अ) पुनर्मिलन केन्द्रों (ब) में तथा पुनर्मिलन केन्द्र (ब) अतिव्यापी केन्द्रों (स) में परिवर्तित हो जाएंगे। इसका अर्थ होगा कि दाब बढ़ाने पर वाहक का पृष्ठ अवस्था पर स्थानीकरण कम होता जाएगा लेकिन वाहक के लिए सुगम्य केन्द्रों का घनत्व बढ़ जाएगा।

धारा-वोल्टता घात नियम :

लाम्पर्ट[3] ने $p-I-n^+$ संधि में अल्प संख्या वाहकों के द्वि अंतःक्षेपण के लिए सिद्ध किया है कि यदि अंतःक्षेपित वाहकों का पुनर्मिलन उस अवस्था में हो जब अंतःक्षेपित वाहकों की संख्या, समष्टि में नैज वाहकों की संख्या कम है, तो धारा-वोल्टता लक्षण घात नियम $I \propto v^2$ का पालन करते हैं। जब पुनर्मिलन करने वाले अंतःक्षेपित वाहकों की संख्या, समष्टि में विद्यमान नैज वाहकों की संख्या से बहुत अधिक हो, तो धारा-वोल्टता लक्षण $I \propto v^3$ नियम का पालन करते हैं। लाम्पर्ट की उपर्युक्त $p-I-n^+$ युक्ति को यहाँ धातु-अर्धचालक स्पर्श के लिए रूपांतरित किया जा सकता है। इस प्रकार यदि नैज अर्धचालक (I प्रदेश) को अंतर पृष्ठ दिक्-आवेश प्रदेश में बदल दें तथा पुनर्मिलन के लिए पृष्ठ अवस्थाओं को उत्तरदायी मानें तो धारा-वोल्टता के लिए उपर्युक्त घात नियमों को यहाँ ठीक मान सकते हैं। जैसा कि पूर्व प्रपत्र में प्रतिवेदित है, धातु p-प्रकार सिलिकन स्पर्श के लिए धारा-वोल्टता लक्षण कक्ष ताप पर $I \propto v^{1.5}$ तथा तरल वायु ताप पर $I \propto v^{3.1}$ की तरह है। n का मान 1.5 तथा 3.1 होने की व्याख्या इस प्रकार कर सकते हैं कि कक्ष ताप पर पुनर्मिलन केन्द्रों का घनत्व तरल वायु ताप की अपेक्षा कम है क्योंकि, जैसा ऊपर कहा जा चुका है, ताप बढ़ने पर पुनर्मिलन केन्द्र (ब), केन्द्रों (स) में बदल जाते हैं। अतः तरल वायु ताप पर प्रवाहित धारा केवल पुनर्मिलन केन्द्रों के माध्यम से है जबकि कक्ष ताप पर यह प्रवाह पुनर्मिलन तथा केन्द्रों (स) के माध्यम से है। दाब बढ़ाने पर पुनर्मिलन केन्द्रों का घनत्व बढ़ता है और इस कारण कक्ष तथा तरल वायु, दोनों तापों पर n के मान में वृद्धि हो जाती है। अधिक दाब बढ़ाने पर पुनर्मिलन केन्द्र, (स) प्रकार के केन्द्रों में बदल जाते हैं और तब n के मान में कमी होनी चाहिये, जैसा कि लगभग ओमिक स्पर्श बनने पर होता है।

3. अशुद्धि सांद्रता का पृष्ठ अवस्था स्थानीकरण पर प्रभाव

फेयरबायर्न[4] ने सैद्धान्तिक रूप में यह सिद्ध किया है कि अशुद्धि सांद्रता बढ़ाने पर, अर्धचालक में पृष्ठ अवस्था अशुद्धि इलेक्ट्रॉन में अन्योन्यक्रिया के कारण पृष्ठ अवस्था पर स्थानीकृत इलेक्ट्रॉन का स्थानीकरण कम हो जाता है। चूंकि धातु-अर्धचालक-प्रकार के स्पर्शों में धारा प्रवाह अप्रत्यास्थ सुरंगी-करण के कारण है[5], जो पृष्ठ अवस्था के माध्यम से होता है, अतः पृष्ठ अवस्था इलेक्ट्रॉन का स्थानीकरण होने से यह अवस्थाएँ अप्रत्यास्थ सुरंगीकरण के लिए सक्रिय हो जाती हैं। अप्रत्यास्थ सुरंगीकरण प्रक्रिया

को ड्यूक[6] के प्रपत्र से अच्छी तरह समझ सकते हैं जहाँ सुरंगीकृत इलेक्ट्रॉन प्राचीर में सतत् विधाओं को उत्तेजित करता है तथा अभिनति बढ़ाने पर और अधिक अप्रत्यास्थ वाहिकाएं खुलती हैं ।

इस प्रकार पूर्व प्रपत्र में अवलोकित इस कथन की पुष्टि होती है कि अशुद्धि-सांद्रता बढ़ाने पर ओमिक स्पर्श अपेक्षाकृत कम दाब पर ही बन जाता है । यहाँ एक आशंका व्यक्त की जा सकती है कि क्या स्वयं अशुद्धि ही अर्धचालक पृष्ठ पर एक असामान्य केन्द्र का कार्य कर सकती है ? अर्थात् क्या पृष्ठ पर अशुद्धि की आयनीकरण ऊर्जा बढ़ जाती है ? इस आशंका को टैपट [7] ने निर्मूल सिद्ध किया है और n प्रकार के अर्धचालकों के लिए यह सिद्ध किया है कि पृष्ठ पर अशुद्धि आयनीकरण ऊर्जा का मान समष्टि की अपेक्षा कम हो जाता है । अतः स्वयं अशुद्धि ही पृष्ठ पर (ब) तथा (स) प्रकार के केन्द्र नहीं बन सकती है ।

4. पृष्ठ जालक स्थिरांक का पृष्ठ अवस्था स्थानीकरण पर प्रभाव

अर्धचालक पृष्ठ पर जालक स्थिरांक में समष्टि की अपेक्षा कमी होने के विभिन्न प्रायोगिक तथा सैद्धान्तिक प्रमाण मिलते हैं । राइमर[8] के अनुसार पृष्ठ ऊर्जा को धनात्मक रखने के लिए पृष्ठ पर जालक स्थिरांक में कमी होनी चाहिए । फिलिप्स [9] के अनुसार भी पृष्ठ पर जालक स्थिरांक कम हो जाता है ।

न्यूबर्जर[10] ने सैद्धान्तिक रूप में यह सिद्ध किया है कि पृष्ठ जालक स्थिरांक बदलने पर पृष्ठ अवस्था में परिवर्तन हो जाता है । इस प्रकार यदि पृष्ठ जालक स्थिरांक में परिवर्तन किया जाता है, जो दाब लगाने पर संभव है, पृष्ठ अवस्था ऊर्जा बढ़ जाती है, अर्थात्, पृष्ठ अवस्था में वाहक का स्थानीकरण कम हो जाता है । इसी प्रकार स्टैरिलका[11] ने दिखाया है कि पृष्ठ परमाणुओं में कूलॉम तथा अनुनाद-समाकलनों में परिवर्तन से, जो यहाँ दाब लगाने से भी संभावित है, पृष्ठ अवस्था अस्तित्व तथा पृष्ठ ऊर्जा में परिवर्तन हो जाता है । इन प्रपत्रों से यह परिणाम निकाल सकते हैं कि एकअक्षीय दाब से पृष्ठ अवस्था से इलेक्ट्रॉन का स्थानीकरण कम हो जाता है ।

5. पृष्ठ-अवस्थाओं में संभावित लघु-परास-विभव पर दाब का प्रभाव

दाब के प्रभाव की व्याख्या के लिए एक अन्य संभावना यह है कि यह प्रभाव अर्धचालक पृष्ठ पर उपस्थित लघु-परास-विभव वाले दोषों तथा पृष्ठ अवस्थाओं के कारण है । जैसा कि चिनी इत्यादि[12] ने दिखाया है, पृष्ठ पर विरूपण दोषों की संख्या बढ़ाने पर दाब-सुग्राहिता बढ़ जाती है । फ्रिट्श[13] के आर्सेनिक निषेचित जरमेनियम के समष्टि प्रतिरोध पर दाब के प्रभाव के अनुसार, प्रतिरोध कम होने का कारण आर्सेनिक अशुद्धि में एक लघु परास विभव का होना है । अभी यह दिखाना बाकी है कि पृष्ठ अवस्थाओं तथा विरूपण दोषों में लघु परास विभव का अस्तित्व है या नहीं ।

उपर्युक्त विश्लेषण से यह अनुमान होता है कि धातु-अर्धचालक स्पर्शों में दाब का प्रभाव पृष्ठ अवस्थाओं अथवा अंतर-पृष्ठ विरूपण केन्द्रों के कारण है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रयोगशाला में समुचित सुविधाएं उपलब्ध कराने के लिए लेखक, राष्ट्रीय भौतिक प्रयोगशाला के निदेशक डॉ० ए० आर० वर्मा के प्रति कृतज्ञता प्रकट करते हैं। एक लेखक (विपिन कुमार) परमाणु ऊर्जा विभाग, बम्बई द्वारा अनुसंधान फेलोशिप प्रदान किए जाने के प्रति आभार प्रकट करता है।

निर्देश

1. कुमार, वि०, राम, सी० तथा प्रसाद, रा०, प्रकाशनाधीन।
2. सोचान्स्की, जे०, लागोव्स्की, जे० तथा मोराव्स्की, ए०, **सरफेस साइन्स**, 1971, **25**, 552
3. लाम्पर्ट, एम० ए०, **प्रोसी०, आई० आर० ई०**, 1962, **50**, 178।
4. फेयरबायर्न, डब्ल्यू० एम०, **सरफेस साइंस**, 1971, **25**, 587
5. मासेर जियान, जे०, **जरनल आफ वेक्यूक साइंस एन्ड टेक्नालाजी**, 1974, **11**, 996
6. ड्यूक, सी० बी०, सिल्वर्सटीन, एस० डी० तथा बेनेट, ए० जे०, **फिजिकल रिव्यू लेटर्स**, 1967, **19**, 315
7. टेफ्ट, डब्ल्यू० ई०, **सरफेस साइंस**, 1973, 34, 108
8. राइमर, टी० बी०, **न्यूओवो सिमेंटो सप्लीमेंट**, 1957, 6 सीरीज **X**, 294
9. फिलिप्स, जे० सी०; **सरफेस साइंस**, 1974, **44**, 290
10. न्यूबर्जर, जे० तथा फिशर, सी० आर०, **फिजिका**, 1975, 79, 350
11. (ए) स्टैरिलका, एम०, **सरफेस साइंस**, 1970, **19**, 318
    (ब) स्टैरिलका, एम० तथा वोजसीन्चोस्की, के० एफ०, **फिजिका**, 1966, **32**, 1274
12. चिनो, के० तथा आरियोशि, एच०, **जर्न० मैथ० फिजिक्स**, केम्ब्रिज, 1968, 7, 1130
13. फ्रिट्शे, एच०, Physics of Solids at High Pressure संपादक : टोमिजुका, सी० टी० तथा एमरिक, आर एम०, (ऐक्रेडेमिक प्रेस, 1965)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 4, October 1976, Pages, 331-334

लैप्लास परिवर्त का गुण

आर० एस० जौहरी
गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, कोटा (राजस्थान)

[प्राप्त—मार्च 21, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य संक्रियात्मक कलन के द्वारा एक प्रमेय की स्थापना है जो सामान्य लक्षण का है और H-फलन में प्राचलों के विशिष्टीकरण से कई फल प्राप्त किये जा सकते हैं।

Abstract

On a property of Laplace transform. *By* R.S. Johari, Department of Mathematics, Government College, Kotah (Rajasthan).

The object of this paper is to establish a theorem by making use of operational calculus. The theorem is of general character and several results can be obtained by specializing the parameters in H-functions.

1. भूमिका :

सक्सेना[1] ने $h(t)$ तथा $K_\nu(\lambda t)h(t)$ के लैप्लास परिवर्त का सम्बन्ध दिया है जब $K_\nu(t)$ द्वितीय प्रकार का संशोधित बेसिल फलन है। गोखरू[2] ने इस फल की सहायता से कुछ समाकल ज्ञात किये हैं। प्रस्तुत शोधपत्र में संक्रियात्मक फलन की सहायता से एक प्रमेय स्थापित किया गया है।

संक्षेपण की दृष्टि से केवल कुछ ही रोचक उपप्रमेय दिये गये हैं।

फलन $f(t)$ के लैप्लास परिवर्त को

$$\psi(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$$

समीकरण द्वारा दिया जाता है जिसे हम सांकेतिक रूप में $\psi(p)\doteq f(t)$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

2. प्रमेय :

यदि
$$\psi(p) \doteqdot f(t) \tag{2·1}$$

तथा
$$\phi(p) \doteqdot t^{\rho-2} H^{m,n}_{r,s}\left[\alpha t \left|\begin{matrix}(a, A)\\(b, B)\end{matrix}\right.\right] \phi(t) \tag{2·2}$$

तो
$$\phi(p)=p \int_0^\infty f(x)(p+x)^{-\rho} H^{m,n+1}_{r+1,s}\left[\frac{\alpha}{p+x}\left|\begin{matrix}(1-\rho, 1), (a, A)\\(b, B)\end{matrix}\right.\right] dx \tag{2·3}$$

बशर्ते कि समाकल अभिसारी हो, $R(p)>0$, $R(\alpha)>0$ तथा $|f(t)|$ और $\left|t^{\rho-2} H^{m,n}_{r,s}\left[\alpha t \left|\begin{matrix}(a, A)\\(b, B)\end{matrix}\right.\right]\psi(t)\right|$ के लैप्लास परिवर्त का अस्तित्व हो। H-फलन को निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं

$$H^{m,n}_{r,s}\left[x\left|\begin{matrix}(a, A)\\(b, B)\end{matrix}\right.\right]=H^{m,n}_{r,s}\left(x\left|\begin{matrix}(a_1,A_1)(a_2, A_2)\dots(ar, Ar)\\(b_1, B_1), (b_2, B_2)\dots(bs, Bs)\end{matrix}\right.\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-B_j\xi)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+A_j\xi)}{\prod_{j=m+1}^{s}\Gamma(1-b_j+B_j\xi)\prod_{j=n+1}^{s}\Gamma(a_j-A_j\xi)} x^{\xi} d\xi$$

जहाँ रिक्त गुणनफल को इकाई मानते हैं, $1\leqslant m\leqslant s$; $0\leqslant n\leqslant r$, समस्त A तथा B धन हैं, L उपयुक्त के लिये कंटूर है जो $\Gamma(b_j-B_j\xi)$; $j=1, 2, \dots, m$ के पोलों को $\Gamma(1-a_j+A_j\xi)$ यदि $j=1, 2, \dots, n$ से पृथक करता है। अर्थात्

$$A_j(b_h+v)\neq B_h(A_i-\eta-1)$$
$$(v, \eta=0, 1, 2, \dots; h=1, \dots, m; i=1, \dots, n)$$

उपपत्ति :

(2·2) से

$$\phi(p)=p\int_0^\infty t^{\rho-2} e^{-pt} H^{m,n}_{r,s}\left[\alpha t\left|\begin{matrix}(a, A)\\(b, B)\end{matrix}\right.\right] \psi(t)\, dt$$

तथा (2·1) से हमें निम्नांकित प्राप्त होता है

$$\psi(t)=t\int_0^\infty e^{-tx} f(x)\, dx$$

$$\phi(p)=p\int_0^\infty t^{\rho-1} e^{-pt} H^{m,n}_{r,s}\left[\alpha t\left|\begin{matrix}(a, A)\\(b, B)\end{matrix}\right.\right]\times\int_0^\infty e^{-tx} f(x)\, dx$$

या $$\phi(p)=p\int_0^\infty f(x)\,dx\int_0^\infty t^{\rho-1}e^{-t(p+x)}H_{r,s}^{m,n}\left[\alpha t\left|\begin{matrix}(a,A)\\(b,B)\end{matrix}\right.\right]dt$$

अथवा $$\phi(p)=p\int_0^\infty f(x)\,(p+x)^{-\rho}\;H_{r+1,s}^{m,n+1}\left[\frac{\alpha}{p+x}\left|\begin{matrix}(1-\rho,1),(a,A)\\(b,B)\end{matrix}\right.\right]dx$$

जहाँ $R\left(\rho+\min\frac{b_j}{B_j}\right)>0$ यदि $j=1, 2, ..., m$

$$|\arg\alpha|<\frac{\lambda\pi}{2},\ \lambda>0 \text{ जहाँ } \lambda=\sum_{j=1}^{n}A_j-\sum_{n+1}^{r}A_j+\sum_{j=1}^{m}B_j-\sum_{j=m+1}^{s}B_j$$

सम्प्रयोग :

$f(t)=t^{\sigma-1}$ लेने पर

$$t^{\sigma-1}\doteqdot\Gamma\sigma\,p^{-\sigma+1}=\psi(p)$$

तथा $$\Gamma\sigma\,t^{\rho+\sigma-3}H_{r,s}^{m,n}\left[\alpha t\left|\begin{matrix}(a,A)\\(b,B)\end{matrix}\right.\right]\doteqdot\frac{(\sigma)}{p^{\rho+\sigma-3}}H_{r+1,s}^{m,n+1}\left[\frac{\alpha}{p}\left|\begin{matrix}(1-\rho,1)(a,A)\\(b,B)\end{matrix}\right.\right]=\phi(p)$$

प्रमेय के सम्प्रयोग से

$$\int_0^\infty x^{\sigma-1}(p+x)^{-\rho}\;H_{r+1,s}^{m,n+1}\left[\frac{\alpha}{p+x}\left|\begin{matrix}(1-\rho,1),(a,A)\\(b,B)\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$=\frac{\Gamma\sigma}{p^{\rho+\sigma-3}}H_{r+1,s}^{m,n+1}\left[\frac{\alpha}{p}\left|\begin{matrix}(1-\rho,1),(a,A)\\(b,B)\end{matrix}\right.\right]$$

जो $-\rho+\max.\left(\frac{1-aj}{Aj}\right)<0,\ \sigma-\rho>0,\ |\arg\alpha|<\frac{(\lambda+1)\pi}{2},\ \lambda+1>0,\ \sigma>0$ के लिये वैध है ।

(2·4)

तब (2·4) से

$(p+x)^{-\rho}H_{r+1,s}^{m,n+1}\left[\frac{\alpha}{p+x}\left|\begin{matrix}(1-\rho,1),(a,A)\\(b,B)\end{matrix}\right.\right]$ का मेलिन परिवर्त प्राप्त होता है ।

उपप्रमेय :

I. यदि $\psi(p)\doteqdot f(t)$ तथा $A_i=B_j=1$ समस्त i तथा j के लिये एवं

$$\phi(p)\doteqdot t^{\rho-2}\;G_{r,s}^{m,n}\left[\alpha t\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,ar\\b_1,\ldots,as\end{matrix}\right.\right]\psi(t)$$

तो $$\phi(p)=p\int_0^\infty f(x)(p+x)^{-\rho}G_{r+1,s}^{m,n+1}\left[\frac{\alpha}{p+x}\left|\begin{matrix}1-\rho,a_1,a_2,\ldots,a_r\\b_1,b_2,\ldots,b\end{matrix}\right.\right]dx$$

(H-फलन G-फलन में समानीत होता है)

यदि $$R(p)>0,\ R(a)>0 \tag{2·5}$$

बशर्ते कि समाकल अभिसारी हो तथा

$|f(t)|$ तथा $\left| t^{\rho-2}\, G^{m,\,n}_{r,\,s}\left[at \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix}\right] \phi(t) \right|$ के लैप्लास परिवर्त का अस्तित्व रहे।

II. I में $m=2, n=0, r=1$ तथा $s=2$ रखने पर हमें निम्नांकित फल प्राप्त होता है :

यदि $\psi(p) \doteqdot f(t)$

तथा $$\phi(p) \doteqdot t^{\rho-2}_{\rho-2}\, t^{1/2(b+c-1)-t}\, e^{t/2}\, W_{k,m}(t)\psi(t)$$

$$= t^{\rho-2}\, G^{20}_{12}\left(t \,\middle|\, \begin{matrix} a \\ b,\ c \end{matrix}\right) \psi(t)$$

जहाँ $k=\frac{1}{2}(1+b+c)-a$ तथा $m=\frac{b}{2}-\frac{c}{2}$

तो $$\phi(p)=p\int_0^\infty f(x)(p+x)^{-\rho}\, G^{21}_{22}\left[\frac{1}{p+x} \,\middle|\, \begin{matrix} 1-\rho,\ a \\ b,\ c \end{matrix}\right] dx$$

या $$\phi(p)=p\int_0^\infty f(x)(p+x)^{-\rho}\, H^{21}_{22}\left[\frac{1}{p+x} \,\middle|\, \begin{matrix} (1-\rho,\ 1),\ (a,\ 1) \\ (b,\ 1),(c,\ 1) \end{matrix}\right] dx$$

अथवा $$\phi(p)=p\int_0^\infty f(x)(p+x)^{-\rho}\, G^{12}_{22}\left[p+x \,\middle|\, \begin{matrix} 1-b,\ 1-c \\ \rho,\ 1-a \end{matrix}\right] dx$$

या $$\phi(p)=p\,\frac{\Gamma(\rho+b)\Gamma(\rho+c)}{\Gamma(\rho+a)}\int_0^\infty f(x)(p+x)\ {}_2F_1(\rho+b,\ \rho+c;\ \rho+a;\ -(p+x))dx \tag{2·6}$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० आर० क० सक्सेना का अभारी है जिन्होने पथ प्रदर्शन किया।

निर्देश

1. सक्सेना, आर० के०, S. Maths. Annalen, 1961. **147**, 154-57.
2. गोखरू, डी० सी०, Portugalian Mathematics 167, **27** Fas. 2.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 4, October, 1976, Pages 335-336

धान की भूसी से कार्बोहाइड्रेट

एस० एस० जोशी
रसायन विभाग, शासकीय इंजीनियरिंग कालेज, रायपुर
तथा
एस० एस० निगम
रसायन विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—अप्रैल 11, 1976]

सारांश

मध्यप्रदेश की देशी सफरी किस्म की धान की भूसी (वसाविहीनीकृत) में भार के अनुसार लगभग 1·4% कार्बोहाइड्रेट होते हैं। पत्र क्रोमैटोग्राफी द्वारा इसमें ग्लूकोस, फ्रुक्टोस, गैलैक्टोस, रैमनोस, सुक्रोस तथा एक अन्य अनपहिचाना आलिगोसैकेराइड की उपस्थिति क्रमश: 2·3·7, 11·6, 14·4, 12·9, 25·9 तथा 11·5% (मानक ग्लूकोस के रूप में) पाई गई।

Abstract

A note on carbohydrates of oryza sativa bran. *By* S. S. Joshi, Department of Chemistry, Government College of Engineering and Technology, Raipur and S. S. Nigam, Department of Chemistry, Saugar University, Sagar.

Carbohydrates constitute about 1·4% w/w, of the ethanolic extract of the defatted *oryza sativa* bran of dessi safari variety of Madhya Pradesh. Paper chromatographic techniques revealed the presence of glucose, fructose, galactose, rhamnose, sucrose and one unidentified spot possibly of an oligo (tri)-saccharide of Rf values 0·39, 0·34 in *n*-butanol: pyridine: water (6:4:3) and benzene: *n*-butanol: pyridine: water (1: 5: 3: 3) solvents respectively. Their relative proportions have been found to be 23·7, 11·6, 14·4, 12·9, 25·9 and 11·5% respectively in terms of glucose standard.

प्रयोगात्मक

वसाविहीनीकृत धान की भूसी 80% एथेनॉल से भलीभाँति निष्कर्षित किया गया और निष्कर्ष को सान्द्रित करके चासनी बना ली गई। धान की भूसी में से निष्कर्षित कार्बोहाइड्रेटों के निश्चयन हेतु

गुणात्मक पत्र क्रोमैटोग्राफी का उपयोग किया[1-4]। निष्कर्षण हेतु (क) n-ब्युटेनॉल : पिरिडीन : जल (6 : 4 : 3)(ख) बेंजीन n-ब्युटेनॉल : पिरिडीन : जल (1 : 5 : 3 : 3) (ग) एथिल ऐसीटेट : पिरिडीन जल (2 : 1 : 2) तथा (घ) n ब्युटेनॉल : ऐसीटिक अम्ल : जल (4 : 1 : 5) विलायक प्रयुक्त हुए। क्रोमैटोग्रामों के अभिरंजन हेतु विभिन्न अभिरंजकों[5] का प्रयोग किया गया। पूर्ववर्ती कार्यकर्त्ताओं[6-7] से यह भिन्नता देखी गई कि अन्तिम दो विलायक जो पौदों में अनेक शर्कराओं की उपस्थिति बताने में उपयोगी हैं, वैसे नहीं पाये गये क्योंकि इन विलायकों में शर्कराओं के Rf मान एक से रहते हैं[8, 9]।

प्रत्येक शर्करा धब्बे के ऐनिलीन थैलेट रंग को 80% एथेनॉल में बने 0·7N HCl की 5 मिली० मात्रा से धोकर करके स्पेकाल रंगमापी द्वारा 410mμ पर मापा गया और परिणामों को समान अवस्थाओं में ग्लूकोस से प्राप्त मानक वक्र के रूप में व्यक्त किया गया। यह पाया गया कि वसाविहीनीकृत धान की भूसी के शर्करा आइसोलेट में 23·7% ग्लुकोस, 11·6% फ्रुक्टोस, 14·4% गैलैक्टोस, 12·9% रैमनोस, 25·9% सुक्रोस तथा 11·5% अनपहिचानी शर्करा उपस्थित हैं। इस शर्करा के Rf मान ब्युटेनाल : पिरिडीन : जल (6 : 4 : 1) में 0·39 तथा बेंजीन n- ब्युटेनाल : पिरिडीन जल (1 : 5 : 3 : 3) विलायक में 0·34 हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक श्री० वी० वी० सारस्वते, निदेशक प्रौद्योगिक शिक्षा मध्य प्रदेश, भोपाल तथा डा० वी० जी० वैद्य, रसायन प्रोफेसर राजकीय इंजीनियरी तथा टेक्नालाजी महाविद्यालय रायपुर के अत्यन्त आभारी हैं जिन्होंने इस कार्य के सम्पन्न होने के लिये सुविधायें प्रदान कीं।

निर्देश

1. विल्सन, **अनाल० केमि०**, 1959, **31**, 1199.
2. जोशी, एस० एस०, **पी०एच० डी० थीसिस, रविशंकर विश्वविद्यालय**, 1974.
3. जेर्मिन, एम० ए० तथा ईशरवुड, एफ० ए०, **बायो केमि० जर्न०**, 1949, **44**, 402.
4. ब्लाक, डुरम तथा ज्वीग, Paper Chromatography and Paper Electrophoresis, **द्वितीय संस्करण, एकडेमिक प्रेस न्यूयार्क**, 1958.
5. हू, एल०, जोन्स, जे० के० तथा वैडमैन, डब्लू० एच०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1950, 1702.
6. राघापन्त तथा तुलसियानी, डी० आर० पी०, **करेंट साइंस०**, 1968, **37**, 74.
7. वाघेर, सी० सी० तथा चौहान, सी० एस०, **इंडि० जर्न० केमि०**, 1964, **2**,81.
8. पार्ट्रिज, एस० एम०, **बायो० केमि० जर्न०**, 1948, **42**, 238.
9. जेर्मिन, एम० ए० तथा ईशरवुड, एफ० ए०, **बायो० केमि० जर्न०**, 1949, **44**, 402.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 19, No 4, October, 1976, Pages 337-341

गेजकल्प फलन समष्टि में स्थिर विन्दु-प्रमेय

के० पी० गुप्ता
द्वारा राजकीय विज्ञान महाविद्यालय, रीवाँ

[प्राप्त—नवम्बर 22, 1975]

सारांश

वैद्यनाथ रे ने संतत प्रतिचित्र के अनुक्रम के लिये मीटरी समष्टि हेतु एक स्थिर बिन्दु प्रमेय सिद्ध किया है। हमने इस प्रमेय को गेजकल्प फलन समष्टि के लिये प्रयुक्त किया है।

Abstract

Fixed point theorem in quasi-gauge function space. *By* K. P. Gupta c/o Prof. N. P. S. Bawa, Government Science College, Rewa.

Baidyanath Ray[1] has proved a fixed point theorem for a sequence of continuous maps on a metric space [see theorem 2.1]. We extend this theorem for quasi-gauge function space.

हम कुछ परिभाषायें दे रहे हैं :

रेली द्वारा गेजकल्प समष्टि (quasi-gauge space) के लिये दी गई परिभाषा को हम गेजकल्प फलन के लिये विस्तृत करेंगे।

परिभाषा 1 :

सांस्थितिक समष्टि वंश (Y^x, P) के लिये गेजकल्प संरचना Y^x पर छद्मदूरीक कल्प का Y^x ऐसा वंश है कि P के उपआधार के रूप में $\{B(f, p, \in): f \in Y^x, p \in P, \in > 0\}$ वंश है जहाँ $B(f, p, \in)$ ऐसा है कि समुच्चय $\{f \text{ in } Y^x / p(f, g) > \in\}$. यदि समष्टि (Y^x, P) की गेजकल्प संरचना P है तो यह गेज-कल्प फलन समष्टि कहलाता है और (Y^x, P) द्वारा व्यक्त किया जाता है। इसके अतिरिक्त यदि (Y^x, P) तो हम P को केवल d वाला ही मानते हैं।

परिभाषा 2 :

गेजकल्प फलन समष्टि Y^x का स्वत: में संतत प्रतिचित्रण $T : Y^x \to Y^x$ सघनीकरण कहलाता है यदि प्रत्येक $f, g \in Y^x$ ऐसा हो कि $p(f, g) > 0$, तब हमें

$$p(Tf, Tg) < \sup(f(x), g(x)).$$

प्राप्त होगा ।

प्रमेय 1 :

माना कि $\{T_n\}$ सघनीभूत तथा अत्यन्त p—संकुचित प्रतिचित्रण का अनुक्रम है और प्रत्येक प्रतिचित्रण स्वत: में वाम या दक्षिण अनुक्रम का होने से पूर्ण गेजकल्प फलन समष्टि (Y^x, P) है जिससे कि

(i) किसी भी प्रतिचित्रण T_i, T_j, $p(T_i f, T_j g) > \lambda p(f, g)$,

जहाँ $0 < \lambda < 1$ तथा $f, g \in Y^x$ यदि $f \neq g$

तथा (ii) Y^x में बिन्दु f_0 ऐसा है कि $\{f_n = T_n f_{n-1}\}$ की कोई भी दो क्रमागत संख्यायें स्पष्ट हैं ।

तब $\{T_n\}$ में एक अद्वितीय उभयनिष्ट स्थिर बिन्दु होता है ।

उपपत्ति :

उपर्युक्त प्रमेय को पहले ही एक शोध पत्र में[2] सिद्ध किया जा चुका है ।

हम गेजकल्प फलन समष्टि की पूर्ति को निम्नवत् परिभाषित करते हैं :

माना कि (Y^x, P) एक गेजकल्प फलन समष्टि है तथा $(Y^{x\#}, P\#)$ इसकी पूर्ति है, तो $Y^{x\#}$ (Y^x, P) में निहित कॉशी अनुक्रम का समस्त तुल्यता वर्ग निम्न प्रकार से परिभाषित तुल्यता सम्बन्ध के अन्तर्गत पाया जाता है । यदि $\{f_n\}$ तथा $\{g_n\}$ (Y^x, P) के P-कोशी हों तो $\{f_n\}$ तुल्य होगा $\{g_n\}$ के तभी जबकि $\lim_{n\to\infty} (f_n, g_n)(x) = \sup(f_n(x), g(x))$ । माना कि $T: (Y^x, P) \to (Y^x, P)$ संकुचन प्रतिचित्र है । तो $T\#: (Y^{x\#}, P\#) \to (Y^{x\#}, P\#)$ को निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :

यदि $f\# \in \overline{Y}^{x\#}$ संयुक्त $\{f_n : f_n \in Y\#\} \in f\#$, तो $T\# f\#$ तुल्यता वर्ग जिसमें $\{T f_n\}$.

पहले हम दो प्रमेयिकायें सिद्ध करेंगे ।

प्रमेयिका 1 :

माना कि $\{T_n\}$ सघनीभूत प्रतिचित्रण का अनुक्रम है, जिसमें प्रत्येक प्रतिचित्रण अपने आपमें एक ऐसा गेजकल्प फलन समष्टि $(Y^x. P)$ है कि

(i) यदि $f, g \in Y^x$ के साथ $f \neq g$ तो $p(T_i f, T_j g)(x) < \lambda$

$\sup (f(x), g(x))$ जहाँ $0 < \lambda < 1$ तथा $i, j = 1, 2, \ldots,$

एवं (ii) Y^x में एक बिन्दु f_0 ऐसा है कि f_n के कोई दो क्रमागत सदस्य सुस्पष्ट हैं जहाँ

$$f_n = T_n f_{n-1},\ n = 1, 2, \ldots,$$

तो $Y^{x\#}$ में (i) तथा (ii) $\{T^{\#}_n\}$ के लिये सत्य हैं ।

उपपत्ति :

(i) माना कि $f^{\#}, g^{\#}$ $Y^{x\#}$ के कोई ऐसे दो विन्दु हैं कि

$f^{\#} \neq g^{\#}$ तथा माना कि $\{f_n\} \in f^{\#}$ तथा $\{g_n\} \in g^{\#}$

सामान्यीकरण की हानि के बिना, माना $f_n \neq g_n$ समस्त n के लिये किन्हीं दो सदस्यों T_i, T_j के लिये,

$$p(T_i f_n, T_j g_n)(x) < \lambda \text{ Sup } (f_n(x), g_n(x))$$

अर्थात् $$p^{\#}(T^{\#}_i f^{\#}, T^{\#}_j g^{\#})(x) < \lambda \text{ Sup } (f^{\#}(x), g^{\#}(x)).$$

(ii) $f^{\#}_0 = f' =$ तुल्यता वर्ग लेने पर जिसमें $\{f_0, f_0, \ldots, f_0, \ldots\}$ माना कि $f^{\#}_1 = T^{\#}_1 x'$ तुल्यता वर्ग जिसमें $\{T_1 f_0, T_1 f_0, \ldots, T_1 f_0, \ldots\}$ हैं अर्थात् ऐसा जिसमें $\{f_1, f_1, \ldots, f_1, \ldots\} = f_1$, हैं। इसी प्रकार $f^{\#}_n = f'_n$ जहाँ $n = 1, 2, \ldots,$ चूँकि $f_r \neq f_{r+1}$ किसी भी r के लिये अतः $f'_r \neq f'_{r+1}$ अतएव $f^{\#}_r \neq f^{\#}_{r+1}$ किसी भी r लिये । उपपत्ति पूर्ण हुई ।

टिप्पणी : प्रमेयिका-1 की संकल्पना के अन्तर्गत हम प्रमेय-1 का प्रयोग यह दिखाने के लिये कि प्रतिचित्रण $\{T_n\}$ $(Y^{x\#}, P^{\#})$ कर सकते हैं जिसमें प्रत्येक का $Y^{x\#}$ में स्वतः एक अद्वितीय उभयस्थिर बिन्दु $f^{\#}$ होता है ।

प्रमेयिका 2 :

यदि $\{T_n\}$ प्रतिचित्रणों के घनीभूत होने का परिणाम हो तो प्रत्येक प्रतिचित्रण अपने आप में गेज-कल्प फलन समष्टि (Y^x, P) है और Y^x का एक सघन उपसमुच्चय $Y_0{}^x$ है जिससे कि किन्हीं दो प्राचलों $T_i T_j$ के लिये $p(T_i f, T_i g)(x) < \lambda \text{ Sup } (f(x), g(x))$ जहाँ $0 < \lambda < 1$ तथा $f, g \in Y^x{}_0$ के साथ $f \neq g$ तो $p(T_i f, T_j g)(x) < \lambda \text{ Sup } (f(x), g(x))$ समस्त $f, g \in Y^x$ के लिये $f \neq g$ के साथ ।

उपपत्ति :

माना कि $f \neq g$ Y^x के कोई दो विन्दु हैं । चूँकि $Y_0{}^x$ Y^x में सघन है अतः $Y_0{}^x$ विन्दुओं के दो अनुक्रम $\{f_n\}$ तथा $\{g_n\}$ हैं जिससे कि $\lim f_n \to f.$ $\lim g_n \to g$ तथा $f_n \neq g_n$ n । चूँकि $f_n, g_n \in Y^{x}{}_0$

तथा $f_n \neq g_n$, अतः $p(T_j f_n, T_i g_n)(x) < \lambda \sup(f_n(x), g_n(x))$. T_i, T_j का सातत्य प्रयुक्त करने पर $p(T_i f, T_j g)(x) < \lambda \sup(f(x), g(x))$

प्रमेय 1:

माना कि $\{T_n\}$ संतत सघनीभूत प्रतिचित्रण का प्रतिफल है और प्रत्येक प्रतिचित्रण अपने में एक गेज-कल्प फलन समष्टि (Y^x, P) है। कल्पना किया कि Y^x का एक ऐसा उपसघन समुच्चय Y^x_0 है कि

(i) किन्हीं दो संकारकों के लिये $T_i, T_j, p(T_i f, T_j g)(x) < \lambda \sup(f(x), g(x))$, जहाँ $0 < \lambda < 1$ तथा $f, g \in Y^x_0$ के साथ $f \neq g$

तथा (ii) Y^x में f_0 ऐसा बिन्दु है कि $\{f_n = T_n f_{n-1}\}$ के कोई दो क्रमागत सदस्य सुस्पष्ट हैं।

तो एक अद्वितीय स्थिर बिन्दु h की अवस्थिति के लिये जो $\{T_n\}$ में उभयनिष्ट है आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि $h^\#$ में कोई अनुक्रम $\{h_n\}$ है जिसमें $T_n^\# h^\# = h^\#, (n=1, 2, \ldots,)$ जो h में अभिसारी होता है।

उपपत्ति :

प्रमेयिका-2 के अनुसार (i) $f = g$ से युक्त Y^x के प्रत्येक युग्म f, g के लिये सत्य है तो प्रमेयिका के बाद की टिप्पणी के अनुसार $Y^{\lambda\#}$ में ऐसा अद्वितीय स्थिर बिन्दु $h^\#$ है जो $\{T_n^\#\}$ में उभयनिष्ट है। काफी हद तक माना कि Y^x में एक बिन्दु h में अभिसारी हो जाता। स्थिर m के लिये

$$\begin{aligned} p(h, T_m h) &= p^\#(h', (T_m h'))(x) \\ &< p^\#(h', h^\#)(x) + p^\#(h^\#, T_m^\# h^\#)(x) \\ &+ p^\#(T_m^\# h^\#, (T_m h_n)')(x) + p^\#((T_m h_n)', (T_m h)')(x) \end{aligned}$$

$T_m, \lim_{n \to \infty} ((T_m h_n)', (T_m h)')(x) = 0$ तथा दाहिनी ओर के शेष पदों के सातत्य से यह शून्य हो जाते हैं जैसे $n \to \infty$ अतः सीमा $n \to \infty$, $p(h, T_m h) = 0$ अर्थात् $T_m h = h$.

अतः हम सिद्ध करते हैं कि h ऐसा स्थिर बिन्दु है जो $T_n (n=1, 2, \ldots,)$ में उभयनिष्ट है। $h^\#$ से ही h की अद्वितीयता प्राप्त होती है।

यदि h ऐसा स्थिर बिन्दु है जो $\{T_n\}$ में उभयनिष्ट हो तो $h' =$ तुल्यता वर्ग जिसमें $\{h, h, \ldots, h, \ldots,\}$ एक स्थिर बिन्दु है जो $T_n(n=1, 2, \ldots,)$ में उभयनिष्ट है। चूँकि h अद्वितीय अतः $h^\#$ में $\{h, h, \ldots, h, \ldots,\}$ रहता है। $f_n = f$ को प्रत्येक n के लिये परिभाषित करने पर $\{f_n\} \in f^\#$ तथा यह h में अभिसारी होता है।

इससे उपपत्ति पूर्ण हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० आर० सी० वर्मा तथा प्रोफेसर एन० पी० एस० बावा का अत्यन्त कृतज्ञ है जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. बैद्यनाथ, रे, **बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा०**, 1971, **63**, 7-10.
2. गुप्ता, के० पी०, (प्रेषित)
3. रेली, एल०, **जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1973, **6**, 481-87.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 4, October, 1976, Pages 343-346

विद्युतरोधी में प्लाज्मा अंत:क्षेपण

वाई० के० शर्मा
भौतिकी विभाग, आर० बी० एस० कालेज, आगरा

[प्राप्त—अप्रैल 5, 1976]

सारांश

विद्युतरोधी अंत:क्षेपित प्लाज्मा में धारा-वोल्टता गुणों के लिये तप्तवाहक क्षेत्र में व्यंजक परिगणित किये गये हैं।

Abstract

Plasma injection in insulators in the hot carrier regime. *By* Y. K. Sharma, Physics Department, R. B. S. College, Agra.

The expressions for the current-voltage characteristics in the insulator injected plasma have been calculated in the carrier regime.

प्रस्तावना

विद्युतरोधी में निम्न क्षेत्र प्लाज्मा के हेतु लैम्पर्ट तथा मार्क[2] का प्रयोग किया जाता है। यहाँ पर प्लाज्मा को तप्त वाहक अवस्थाओं में अंत:क्षेपित किया जा रहा है। उच्च क्षेत्र गतिशीलता सम्बन्ध गिसालफ तथा जिजल्स्ट्रा[1] द्वारा परिगणित सम्बन्ध की भाँति है और लेखक[4] ने एकाकी अंत:क्षेपण ठोस अवस्था डायोड के लिये प्रयुक्त किया है। लेखक[3-6] ने विद्युतरोधी में धारा अंत:क्षेपण का ध्यान रखा है।

समग्र धारा घनत्व (J) का समीकरण

$$J = e\bar{n}\bar{v}_n + e\bar{p}\bar{v}_p = e\bar{n}(\bar{v}_n + \bar{v}_p). \quad (1)$$

है जहाँ $\bar{n}, \bar{p}$ क्रमशः अंत:क्षेपित मुक्त इलेक्ट्रान तथा रिक्तिका सान्द्रता है जबकि $\bar{v}_n$ तथा $\bar{v}_p$ इलेक्ट्रान तथा रिक्तिका के औसत वेग हैं। समीकरण (1) में प्लाज्मा अवस्था ($\bar{n}=\bar{p}$) प्रयुक्त है। उच्च क्षेत्रगतिशीलताओं एवं निम्न क्षेत्र गतिशीलताओं के सम्बन्ध निम्न प्रकार हैं।

$$\mu_n = \mu_{n,0} \sqrt{\left(\frac{E_{c,n}}{E(x)}\right)}, \tag{2}$$

$$\mu_p = \mu_{p,0} \sqrt{\left(\frac{E_{c,p}}{E(x)}\right)}, \tag{3}$$

जहाँ $E_{c,n}$ तथा $E_{c,p}$ क्रमशः इलेक्ट्रोनों एवं रिक्तिकाओं के लिये विद्युत क्षेत्र हैं। ये मान निर्देश[1] के आधार पर कल्पित हैं।

समीकरण (1), (2) तथा (3) से

$$J = e\bar{n}\sqrt{E}[\mu_{n,0}\sqrt{(E_{c,n})} + \mu_{p,0}\sqrt{(E_{c,p})}], \tag{4}$$

जहाँ
$$\bar{v}_n = \mu_{n,0}\sqrt{(E_{c,n}E)} \text{ तथा } v_p = \mu_{p,0}\sqrt{(E_{c,p}E)}. \tag{5}$$

यदि उष्मा द्वारा जनित मुक्त इलेक्ट्रान न रहें तो अंतःक्षेपित आवेश तथा वोल्टता को निम्न प्रकार से सम्बन्धित किया जा सकता है[2]

$$Q = \rho L \simeq C_0 V = \frac{\epsilon V}{L} \tag{6}$$

अंतःक्षेपित आवेश θ तथा अंतःक्षेपित प्लाज्मा $e\bar{n}L$ का अनुपात

$$\delta = \frac{Q}{enL} \tag{7}$$

है। निर्देश [2] की ही भाँति आवेश Q (समीकरण 7)

$$Q \approx e\,\bar{n}L[(\bar{t}_n + \bar{t}_p)/\tau], \tag{8}$$

हो जाता है जहाँ

$$\bar{t}_n = \frac{L}{\bar{v}_n},\ \bar{t}_p = \frac{L}{\bar{v}_p} \text{ तथा } \delta \approx \frac{(\bar{t}_n + \bar{t}_p)}{\tau}. \tag{6}$$

समीकरण (9) में t तथा τ क्रमशः अल्पकाल तथा जीवनकाल हैं। अनुपात समीकरण (7) के बिल्कुल बराबर है,

समीकरण (1), (5), (8) तथा (9) से

$$J \approx e\bar{\tau}\mu_{n,0}\,\mu_{p,0}\frac{V^2}{L^4}\sqrt{(E_{c,n}E_{c,p})}. \tag{10}$$

जो वर्ग नियम है, यदि अल्प क्षेत्र गतिशीलता हो तो यह घन नियम होगा।

यदि मुक्त इलेक्ट्रान तथा मुक्त रिक्तिका सान्द्रता वितरण ($n(x)$ तथा $p(x)$) ऊपर प्रयुक्त अंतःक्षेपित प्लाज्मा दशा ($\bar{n} = \bar{p}$), से भिन्न हो तो एक प्रकार के कुल अप्रतिकारित आवेश को प्रति इकाई क्षेत्रफल के लिये परिगणित होना चाहिए। यदि विद्युतरोधी ऐनोड (रिक्तिका अंतःक्षेपी) को $x=0$ पर

और कैथोड (इलेक्ट्रान अंतःक्षेपी) को $x=L$ पर लिया जाय तो $p(x)>n(x)$ ऐनोड पक्ष में $x<L/2$ के लिये; $n(x)>p(x)$ कैथोड में $L/2<x$ के लिये तथा $p(x)=n(x)$ मध्य बिन्दु पर $\bar{x}(\bar{x}\simeq L/2)$. इस अवस्था में अवकाश आवेश वितरण निम्न प्रकार हो जाता है

$$e(p-n)\simeq e\,\bar{n}[(\bar{t}_n+\bar{t}_p)/\bar{\tau}][(\bar{x}-x)/L]. \tag{11}$$

आवेश के एक चिन्ह का मान :

$$Q_+=|Q_-|\simeq e\,\bar{n}[(\bar{t}_n+\bar{t}_p)/\bar{\tau}]\left(\frac{L}{8}\right) \text{ है ।} \tag{12}$$

समीकरण (8) के बजाय समीकरण (12) का प्रयोग करने पर धारा वोल्टता सम्बन्ध,

$$J\cong 8\epsilon\bar{\tau}\mu_{n,0}\,\mu_{p,0}\frac{V^2}{L^4}\,\sqrt{(E_{c,n}\,E_{c,p})}. \tag{13}$$

होगा ।

यदि औसत अंतःक्षेपण स्तर $\bar{n}$ औसत जीवन काल $\bar{\tau}$ का फलन हो अर्थात् $\bar{n}=\bar{n}(\bar{\tau})$, $Q=Q_+$ तथा $t=\dfrac{L^2}{\mu V}$ तो समीकरण (10) तथा (6) से हमें

$$\frac{\bar{\tau}}{\bar{n}(\bar{\tau})}\cong\frac{e(\bar{t}_n+\bar{t}_p)L}{8Q_+}$$

$$\cong\frac{eL^{7/2}}{8\epsilon V^{3/2}}\left[\frac{\mu_{n,0}\sqrt{(E_{c,n})}+\mu_{p,0}\sqrt{(E_{c,p})}}{\mu_{n,0}\mu_{p,0}\sqrt{(E_{c,n}E_{c,p})}}\right]. \tag{14}$$

प्राप्त होगा ।

मुक्त इलेक्ट्रानों तथा मुक्त रिक्तिकाओं के प्रत्यक्ष पुनः संयोग से होने की दशा में समीकरण (14) प्रयुक्त किया जा सकता है जो द्विअणु[2] है ।

हमारे अपने प्रसंग में

$$\bar{n}(\bar{\tau})=\frac{1}{<v\sigma_R>\bar{\tau}}. \tag{15}$$

समीकरण (14) तथा (15) से

$$\bar{\tau}=\frac{L^{7/4}}{4V^{3/4}}\left[\frac{(\mu_{n,0}\sqrt{(E_{c,n})}+\mu_{p,0}\sqrt{(E_{c,p})}}{\mu_R\;\mu_{n,0}\;\mu_{p,0}\sqrt{(E_{c,n}E_{c,p})}}\right.. \tag{16}$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$\mu_R=\left(\frac{\epsilon<v\sigma_R>}{2e}\right).$$

समीकरण (13) में समीकरण (16) का मान रखने पर

$$J \cong 2\epsilon\mu_{n,0}\,\mu_{p,0}\,\frac{V^{5/4}}{L^{9/4}}\left[\frac{(E_{c,n}E_{c,p})^{1/2}(\mu_{n,0}\sqrt{(E_{c,n})}+\mu_{p,0}\sqrt{(E_{c,p})})}{\mu_{R}\,\mu_{n,0}\,\mu_{p,0}}\right]^{1/2} \qquad (17)$$

इस प्रकार समीकरण (17) में धारा-वोल्टता गुण वर्ग नियम न होकर $\frac{5}{4}$वाँ घात नियम होता है।

निर्देश

1. गिसोल्फ, ए० तथा जिजलस्ट्रा, आर० जे० जे०, Solid St. Electron 1973, **16**, 571.
2. लैम्पर्ट, एम० ए० तथा मार्क, पी०, Current Injection in Solids, एकेडमिक प्रेस न्यूयार्क, 1970.
3. शर्मा, वाई० के०, कनै० जर्न० फिजि०, 1974, **52**, 399.
4. वही, Phys. Rev. 1974, **10**, 3273.
5. वही, Solid St. Electron 1974, **17**, 762.
6. वही, इण्डियन जर्न० प्योर एप्लाइड फिजि०, 1975, **13**, 741.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No 4, October, 1976, Pages 347-349

नवीन संश्लेषित द्विक फ्लेवोनाइड

एस० के० गुप्ता, डी० डी० बेरगे तथा एम० एम० बोकाड़िया
विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—जनवरी 2, 1976]

सारांश

3-हाइड्राक्सी फ्लेवोन (फ्लेवोनॉल) तथा 7-हाइड्राक्सी फ्लेवोन के मेथिलीन आयोडाइड द्वारा क्रास मेथिलीकरण से 3-7'' द्विक फ्लेवेनोलॉक्सी मेथेन प्राप्त किया गया। द्विक फ्लेवेनोलाक्सी मेथेन के लिये प्रस्तावित सूत्र (III) की पुष्टि अणुभार, विश्लेषणात्मक परिणाम तथा अवरक्त स्पेक्ट्रम द्वारा की गई है।

Abstract

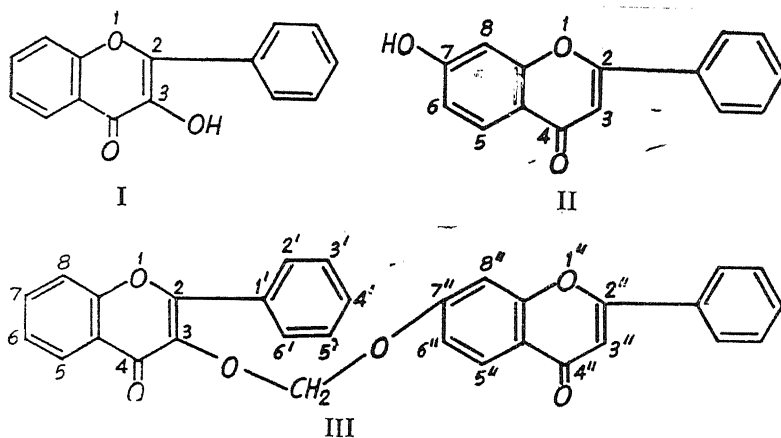
New-synthetic biflavonoid. *By* S. K. Gupta, D. D. Berge and M. M. Bokadia, Vikram University, Ujjain.

3-Hydroxyflavone (flavonal) and 7-hydroxyflavone have been cross methylenated with methylene iodide to provide 3-7'' biflavonoloxymethane. The structure (III) proposed has been confirmed by molecular weight, analytical and infra red spectral data.

प्रकृति में फ्लेवोनाइड्रों का मेथिलीकरण पाया जाता है [1-5]। शेषाद्रि तथा साथियों ने सर्वप्रथम ऐसे बाइफ्लेवोनाइड प्रयोगशाला में प्राप्त किये जिनमें सप्तम स्थान के फिनॉलीय समूह ने मेथिलीन डाइ ऑक्सी समूह से जुड़ने में भाग लिया [6]। प्रयोगशाला में फ्लेवोनॉल के मेथिलीकरण तथा मेथिनीकरण द्वारा द्विक् एवं त्रिक् फ्लेवेनोलाक्सी मेथेन संश्लेषित किये जा चुके हैं [7-9] किन्तु अभी तक तृतीय स्थान के इनॉलीय तथा सप्तम स्थान के फिनॉलीय हाइड्राक्सिल समूह को परस्पर जोड़ने का कोई प्रयास नहीं हुआ है। इस उद्देश्य की पूर्ति हेतु इस कार्य को हमारी प्रयोगशाला में किया गया और हमें तृतीय स्थान के इनॉलीय तथा सप्तम स्थान के हाइड्राक्सिल समूह का मेथिलीन आयोडाइड द्वारा मेथिलीकरण कर उन्हें परस्पर युक्त कर 3-7'' द्विक्-फ्लेवेनॉलाक्सी मेथेन का संश्लेषण करने में पूर्ण सफलता प्राप्त हुई।

I

II

III

प्रयोगात्मक

1 ग्राम फ्लेवेनॉल तथा 1 ग्राम 7-हाइड्राक्सी फ्लेवोन को 80 मि०ली० ऐसीटोन में लेकर इस मिश्रण में 1.4 मि० ली० मेथिलीन-आयोडाइड तथा 8 ग्राम शुष्क पोटैशियम-कार्बोनेट मिलाकर 36 घन्टे तक रिफ्लक्स किया (अभिक्रिया मिश्रण द्वारा फेरिक क्लोराइड से इनॉलीय और फीनॉलीय समूह का नकारात्मक परीक्षण देने तक)। तत्पश्चात अभिक्रया मिश्रण को ठण्डा करके छान लिया। पोटैसियम कार्बोनेट को तीन बार 20-20 मि० ली० ऐसीटोन से धोकर और छानकर छनित को प्रथम छनित में मिलाया। छनित से विलायक के वाष्पित करने के उपरान्त गहरे लाल रंग का चिपचिपा द्रव शेष रहा जो ठण्डा करने पर ठोस रूप में परिणत हो गया। बेंजीन से बार-बार क्रिस्टलीकरण करने पर 0.4 ग्राम रंगहीन क्रिस्टलीय पदार्थ द्रवणांक 188 – 81° प्राप्त हुआ। यह पदार्थ निम्नलिखित परिणामों के आधार पर 3-7'' द्विक फ्लेवेनोलाक्सी मेथेन (III) प्रमाणित हुआ।

1 अणुभार-रास्ट-केम्फर विधि द्वारा 472 प्राप्त हुआ।

2. विश्लेषणात्मक परिणाम :

प्राप्त: C, 76.2; H, 4.2 $C_{31}H_{20}O_6$ के लिये आवश्यक C, 76.2; H, 4.09%

3. **अवरक्त स्पेक्ट्रम**

पोटैशियम ब्रोमाइड में निम्नांकित बैंड प्रदर्शित करता है।

2900, 1910, 1680 (कीटो समूह), 1615, 1180, 1030 (मेथिलीन डाइआक्सी समूह), 830 तथा 775 cm^{-1}

कृतज्ञता-ज्ञापन

एक लेखक (श्री कृष्ण गुप्ता) के किये गये कार्य के समय उन्हें प्रदत्त शोध छात्रवृत्ति के लिये विश्वविद्यालय अनुदान आयोग नई दिल्ली का आभारी है।

निर्देश

1. गोपीनाथ, के० डब्ल्यू०, किदवई, ए० आर० तथा प्रकाश, एल०, **टेट्राहेड्रान**, 1961, **16**, 201.

2. कोकर, डब्ल्यू०, डहल, टी०, डेम्पसे, सी० तथा मेकमुरेट, टी० बी० एच०, **केमिस्ट्री एण्ड इन्डस्ट्री**, 1962, 216.

3. वान डूरेन, बी० एल०, **ज० आर्गेनिक केमिस्ट्री**, 1961, **26**, 5013.

4. बर्च, ए० जे०, मुरे, वी० तथा मुकर्जी, एस० के०, **टेट्राहेड्रान लेटर्स**, 1962, **15**, 673.

5. खन्ना, आर० एन०, शेषाद्रि, टी० आर०, **टेट्राहेड्रान**, 1963, **19**, 219.

6. ग्रोवर, एस० के०, जैन०, ए० सी० तथा शेषाद्रि, टी० आर०, **टेट्राहेड्रान**, 1964, **20**, 555.

7. बेरगे, डी० डी० तथा बोकाड़िया, एम० एम०, **टेट्राहेड्रान लेटर्स**, 1968, **10**, 1277.

8. बेरगे तथा बोकाड़िया, **केमिस्ट्री एण्ड इण्डस्ट्री**, 1968, 33.

9. बेरगे, डी० डी० तथा बोकाड़िया, एम० एम०, **ज० इण्डि० केमि० सोसा०**, 1970, **10**, 941.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 4, October, 1976, Pages 351-355

H-फलनों की कतिपय अनन्त श्रेणियाँ

वी० सी० नायर तथा वारुगीज फिलिप
गणित विभाग, रीजनल इंजीनियरी कालेज, कालीकट (केरल)

[प्राप्त—नवम्बर 6, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में H-फलनों से सम्बन्धित चार अनन्त श्रेणियों का योगफल दिया गया है। अनन्दानी, भिसे तथा गुप्ता द्वारा प्राप्त फल विशिष्ट दशाओं के रूप में उपलब्ध हैं।

Abstract

Some infinite series of H-functions. *By* V. C. Nair and Varughese Philip, Department of Mathematics, Regional Engineering College, Calicut, Kerala.

This paper gives the sums of four infinite series involving H-functions. The results proved by Anandani [1, p. 118], Bhise [2, p. 270] and Gupta [6, p. 103] are obtained as special cases.

1. **संकेतन तथा प्रयुक्त फल**

$\triangle(n, a)$ से n प्राचलों का समुच्चय $\left\{\frac{a}{n}, \frac{a+1}{n}, \frac{a+2}{n}, \ldots, \frac{a+n-1}{n}\right\}$ (1.1)

व्यक्त होता है तथा

${}_1(a_j, e_j)_m$ मे m युग्मों का समुच्चय $\{(a_1, e_1), (a_2, e_2), \ldots, (a_m, a_m)\}$, (1·2)

${}_1(a_j)_n$ से n प्राचलों का समुच्चय $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, (1·3)

एवं $(a)_r = a(a+1)(a+2)\ldots(a+r-1),\ (a)_0 = 1.$ (1·4)

फाक्स[5] द्वारा प्रचारित H-फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित एवं अंकित किया जाता है

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}{}_1(a_j, e_j)_p\\ {}_1(b_j, f_j)_q\end{matrix}\right.\right] = (2\pi i)^{-1}\int_L \phi(s)x^s\, ds, \quad (1·5)$$

जहाँ $$\phi(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-f_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_js)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-e_js)}$$

$x\neq0$ तथा रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है; m, n, p, q ऐसी संख्यायें हैं कि $0\leqslant m\leqslant q$, $0\leqslant n\leqslant p$, समस्त e तथा f घन संख्यायें हैं, समस्त a तथा b ऐसी जटिल संख्यायें हैं कि $\Gamma(b_j-f_js)$, $j=1, 2, \ldots, m$ का एक भी पोल $\Gamma(1-a_j+e_js)$, $j=1, 2, \ldots, n$, के पोल से संगमी नहीं होता।

अर्थात् $$e_i(b_j+Q\neq f_j(a_i-P-1) \tag{1·7}$$
यदि $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, m$ तथा $P, Q=0, 1, 2, \ldots$

कंटूर L $c-i\infty$ से लेकर $c+i\infty$ तक इस प्रकार फैलता है कि $\Gamma(b_j-f_js)$, $j=1, 2, \ldots, m$ के पोल दाईं ओर तथा $\Gamma(1-a_j+e_js)$, $j=1, 2, \ldots, n$ के पोल बाईं ओर पड़ें। ऐसा कंटूर (1·7) के बल पर सम्भव है।

ब्राक्समा[3] ने सिद्ध किया है कि (1·5) के दाहिने पक्ष का समाकल अभिसारी होगा यदि $\theta>0$ एवं $\arg x \mid<\theta\pi/2$, जहाँ

$$\theta=\sum_{j=1}^{n}(e_j)-\sum_{j=n+1}^{p}(e_j)+\sum_{j=1}^{m}(f_j)-\sum_{j=m+1}^{q}(f_j). \tag{1·8}$$

इस समग्र प्रपत्र में $\phi(s)$ तथा θ क्रमशः (1·6) तथा (1·8) द्वारा प्रदर्शित हैं।

2. संकलन सूत्र

निम्नलिखित सूत्रों की स्थापना की जाती है :

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}H^{m,n+2}_{p+2,q+1}\left[x\middle|\begin{matrix}(a-r,\alpha),(b-r,\beta),(a_j,e_j)_p\\ {}_1(b_j,f_j)_q,(c-r,\alpha+\beta)\end{matrix}\right]$$
$$=\Gamma(a+b-c-1)\,H^{m,n+2}_{p+2,q+2}\left[x\middle|\begin{matrix}(a,\alpha),(b,\beta),{}_1(a_j,e_j)_p\\ {}_1(b_j,f_j)_q,(1-b+c,\alpha),(1-a+c,\beta)\end{matrix}\right], \tag{2·1}$$

बशर्ते कि $Re(a+b-c-1)>0$.

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}H^{m,n+2}_{p+2,q+1}\left[x\middle|\begin{matrix}(a-r,\alpha),(b-r,\alpha),{}_1(a_j,c_j)_p\\ {}_1(b_j,f_j)_q,(c-r,\alpha)\end{matrix}\right],$$
$$=\frac{1}{\Gamma(a-c)\Gamma(b-c)}H^{m+1,n+2}_{p+2,q+1}\left[x\middle|\begin{matrix}(a,\alpha),(b,\alpha),{}_1(a_j,e_j)_p\\ (a+b-c-1,\alpha),{}_1(b_j,f_j)_q\end{matrix}\right], \tag{2·2}$$

बशर्ते कि $Re[a+b-c-1-\alpha(a_i-1)/e_i]>0$ यदि $i=1, 2, \ldots, n$.

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r\,!\,\Gamma(1-c+r)} H_{p+1,\, q+1}^{m+1,\, n+1}\left[x\left|\begin{matrix}(a-r,\, \alpha),\, {}_1(a_j,\, e_j)_p\\(b+r,\, \alpha),\, {}_1(b_j,\, f_j)_q\end{matrix}\right.\right]$$
$$=\Gamma(a-b-c)\ H_{p+2,\, q+2}^{m+1,\, n+1}\left[x\left|\begin{matrix}(a,\, \alpha),\, {}_1(a_j,\, e_j)_p,\, (a-c,\, \alpha)\\(b,\, \alpha),\, {}_1(b_j,\, f_j)_q,\, (b+c,\, \alpha)\end{matrix}\right.\right], \tag{2·3}$$

बशर्ते कि $Re(a-b-c)>0$.

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r}{r\,!\,\Gamma(1-c+r)} H_{p+1,\, q}^{m,\, n+1}\left[x\left|\begin{matrix}(b-r,\, \beta),\, {}_1(a_j,\, e_j)_p\\{}_1(b_j,\, f_j)_q\end{matrix}\right.\right]$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1-a-c)} H_{p+2,\, q+1}^{m+1,\, n+1}\left[x\left|\begin{matrix}(b,\, \beta),\, {}_1(a_j,\, e_j)_p,\, (b-c,\, \beta)\\(b-a-c,\, \beta),\, {}_1(b_j,\, f_j)_q\end{matrix}\right.\right], \tag{2·4}$$

बशर्ते कि $Re[b-a-c-\beta(a_i-1)/e_i]>0$ यदि $i=1, 2, \ldots, n$.

(2·1) की उपपत्ति :

(2·1) के वाम पक्ष के H-फलन को एक समाकल रूप में व्यक्त करने पर, (1·5) का उपयोग करने तथा संकलन एवं समाकलन के क्रम को बदलने पर श्रेणी निम्न में परिणत हो जाती है

$$(2\pi i)^{-1}\int_L \phi(s)\, x^s\, \frac{\Gamma(1-a+\alpha s)\Gamma(1-b+\beta s)}{\Gamma(1-c-(\alpha+\beta)\, s)}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}1-a+\alpha s,\, 1-b+\beta s;\\1-c+(\alpha+\beta)s;\, 1\end{matrix}\right) ds. \tag{2·5}$$

समाकलन तथा संकलन के क्रम में परिवर्तन को वैध माना जाता है क्योंकि (2·5) के समाकल्य में प्रकट होने वाली हाइपरज्यामितीय श्रेणी समान रूप से अभिसारी है यदि $Re(a+b-c-1)>0$ । समाकल (2·5) पूर्णतया अभिसारी होगा यदि $\theta>0$ तथा $|\arg x|<\theta\pi/2$.

(2·5) में गॉस प्रमेय [7, p. 99(1)] व्यवहृत करने पर तथा फिर से परिभाषा (1·5) का उपयोग करने पर (2·1) का दाहिना पक्ष प्राप्त होता है ।

इसी विधि से फल (2·2)(2·3) तथा (2·4) भी सिद्ध किये जा सकते हैं ।

3. विशिष्ट दशायें

$m=q=1, n=p=0, \alpha=\beta=f_1=1$, रखने पर (2·1) निम्न रूप ग्रहण करेगा :

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r(b)_r}{(c)_r\, r\,!}\, {}_2F_2(a+r,\, b+r;\ \triangle(2,\, c+r);\ x/4) = \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\, {}_2F_2(a,\, b;\, c-a,\, c-b; x), \tag{3·1}$$

बशर्ते कि $Re(c-a-b)>0$ तथा $c\neq 0, -1, -2, \ldots$

(2·3) में अनुक्रम ${}_1(a_j,\, e_j)_p$ के स्थान पर $(b+c,\, \alpha),\, {}_1(a_j,\, e_j)_p$ रखने से तथा उसके बाद $\alpha=1,\, m=n=p=q=0$. मानने पर इसे निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-k+m)_{2r}}{r\,!} z^{r/2} W_{k-3r/2,\; m+1/2r}(z)$$

$$= \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)} z^{1/2+m} e^{-z/2} {}_1F_1(\tfrac{1}{2}-k+m;\; \tfrac{1}{2}-k-m;\; -z\;,\; Re(m)<0. \tag{3·2}$$

$k=\frac{3}{2}+m$ रखने तथा सूत्र [4, p. 264(5)] का व्यवहार करने पर (3·2) सरलता से सिद्ध हो जाता है।

पुन: (2·3) में $m=0,\ n=p,\ \alpha=e_j=f_j=1$ रखने पर (3·3) प्राप्त होता है।

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r\,!} \frac{(b)_{2r}}{(c)_r} \frac{\prod_{j=1}^{p} (a_j)_r}{\prod_{j=1}^{q} (b_j)_r} {}_{p+1}F_q(b+2r,\; {}_1(a_j+r)_p;\; {}_1(b_j+r)_q;\; -x)$$

$$= {}_{p+2}F_{q+1}(b,\; b-c+1,\; {}_1(a_j)_p;\; c,\; {}_1(b_j)_q;\; x),\; c>b. \tag{3·3}$$

इसके बाद $p=q=0$ रखने से ल्यूक[7] का ज्ञात फल

$${}_2F_1(b/2,\; (b+1)/2;\; c;\; 4x/(1+2x+x^2))=(1+x)^b\; {}_2F_1(b,\; b-c+1;\; c;\; x). \tag{3·4}$$

प्राप्त होता है। अनन्दानी[1] ने (2·4) की विशिष्ट दशा $(a_p,\ e_p)(b-a-c,\ \beta)$ के लिये सिद्ध की है जब a कोई ऋण पूर्णांक होता है, माना कि $-k$, तो (2·4) निम्न रूप धारण करता है।

$$\sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^{k+r}\, k\,!}{\Gamma(1-c+r)\, r\,!\, (k-r)!} H_{p+1,\, q}^{m,\, n+1}\left[x \middle| \begin{matrix}(b-r,\, \beta),\, {}_1(a_j,\, e_j)_p \\ {}_1(b_j,\, f_j)_q\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-c+k)} H_{p+2,\, q+1}^{m,\, n+2}\left[x \middle| \begin{matrix}(b,\, \beta),\, (b-c,\, \beta),\, {}_1(a_j,\, e_j)_p \\ {}_1(b_j,\, f_j)_q,\, (b-c+k,\, \beta)\end{matrix}\right], \tag{3·5}$$

बशर्ते कि $Re[k+b-c-\beta(a_i-1)/e_i]>0$ जब कि $i=1,\ 2,\ \dots,\ n$.

इसके आगे भी $\beta=e_j=f_j=1,\ b-c=b_q$, रखने पर (3·5) भिसे के द्वारा प्राप्त फल[2] में समानीत हो जाता है।

(3·5) में $k=1$ रखने, समुच्चय ${}_1(b_j,f_j)_q$ के स्थान पर $q+1$ युग्म वाले समुच्चय ${}_1(b_j,f_j)$, $(b-c,\ \beta)$ को रखने तथा c के स्थान पर $b-c$ रखने पर निम्नांकित आवर्ती सम्बन्ध प्राप्त होता है जिसे अन्य विधियों से गुप्ता[6] ने H-फलन के लिये सिद्ध किया है :

$$(b-c-1)\; H_{p+1,\, q+1}^{m,\, n+1}\left[x \middle| \begin{matrix}(b,\, \beta),\, {}_1(a_j,\, e_j)_p \\ {}_1(b_j,\, f_j)_q,\, (c,\, \beta)\end{matrix}\right]$$

$$= H_{p+1,\, q+1}^{m,\, n+1}\left[x \middle| \begin{matrix}(b,\, \beta),\, {}_1(a_j,\, e_f)_p \\ {}_1(b_j,\, f_j)_q,\, (c+1,\, \beta)\end{matrix}\right] - H_{p+1,\, q+1}^{m,\, n+1}\left[x \middle| \begin{matrix}(b-1,\, \beta),\, {}_1(a_j,\, e_j)_p \\ {}_1(b_j,\, f_j)_q,\, (c,\, \beta)\end{matrix}\right]. \tag{3·6}$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक कालीकट रीजनल इंजीनियरी कालेज के प्राचार्य के आभारी हैं जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी के दौरान सुविधायें प्रदान कीं।

निर्देश

1. अनन्दानी, पी०, The Mathematics student, 1969, **37**, 117-123.
2. भिसे, वी० एम०, Math. Annalen, 1964, **154**, 267-272.
3. ब्राक्समा, वी० एल० जे०, Compos. Math., 1963, **15**, 239-241.
4. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transcendental functions, भाग I, मैकग्राहिल, 1953.
5. फाक्स, सी०, अमे० मैथ० सोसा०, 1961, **98**, 395-429.
6. गुप्ता, के० सी०, Annals de la Societe Scientifique de Brusselles, 1965, **79** II, 97-106.
7. ल्यूक, वाई० एल०, The Special Functions and Their approximations, भाग I, एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क 1969.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 4, October 1976, Pages, 357-361

फिल्म संघनन पर आणविक गतिज प्रतिरोध का प्रभाव

जी० के० अग्रवाल
यांत्रिक इंजीनियरी विभाग,
राजकीय इंजीनियरी कालेज, उज्जैन

[प्राप्त—मार्च 10, 1976]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में आणविक गतिज संहति स्थानान्तरण के कारण होने वाले ताप ह्रास पर विचार किया गया है। इस विश्लेषण में एक ऊर्ध्वाधर सपाट प्लेट पर फिल्म संघनन पर अन्त:फलकीय अपरूपण भी सम्मिलित है। यह मान लिया गया है कि अन्त:फलक पर समान अपरूपण प्रतिबल विद्यमान रहता है।

Abstract

Effect of molecular kinetic resistance on film condensation. *By* G. K. Agrawal, Department of Mechanical Engineering, Govt. Engineering College, Ujjain.

In the analysis given below the usually neglected temperature drop due to the molecular kinetic mass transfer is taken into account. The analysis also includes the effect of interfacial shear on film condensation on a vertical flat plate. It is assumed that a uniform shear stress τ exists at the interface.

नामकरण :

g—गुरुत्व त्वरण $m/\sec^2$

λ—संघनन की गुप्त ऊष्मा $\frac{K.\ Cal}{kg.}$

q—संघनन ऊष्मा फ्लक्स $\frac{K.\ Cal}{hr.\ m^2}$

δ—द्रव फिल्म की मोटाई m

Γ- संघनन पिंड फ्लक्स (प्रति इकाई चौड़ाई पर पिंड प्रवाह) $\frac{kg}{m.\ hr.}$

$\triangle T$—ताप पात °C

τ—अपरूपण प्रतिबल kg/m^2

ζ—घनत्व kg/m^3

V—वेग m/hr

ν—गतिशील विस्कासिता

x—रैखिक दूरी

μ—गतिज विस्कासिता $\frac{kg}{m.\ hr.}$

K—तापीय चालकता $\frac{K.\ Cal}{m.\ hr\ °C}$

C_p—विशिष्ठ ऊष्मा

$\delta^*, \tau^*, \beta^*, X^*$—विमाहीन संख्यायें

पादाक्षर :

Sat—संतृप्त

M—औसत, माध्य

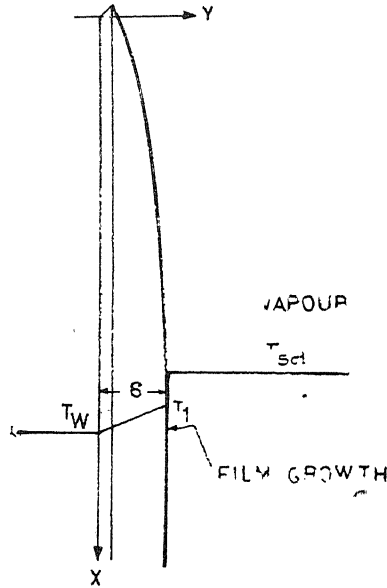
V—बाष्प

W—भित्ति

L—पट्टिका की लम्बाई

∞—मुक्त धारा

भूमिका

नुसेल्ट फिल्म की मोटाई के व्युत्कलन में सामान्यतया गुरुत्वाकर्षण के अन्तर्गत निकास पर विचार करना होता है किन्तु अत्युच्च बाष्प-वेग पर संघनन फिल्म की अधोमुखी गति के वश में बाष्प का खिंचाव (drag) सार्थक हो जाता है। रोह् सेनो, वेबर तथा लिंग [1] ने धन अन्तःफलकीय अपरूपण प्रतिबल के प्रभाव पर ही विचार किया है और द्रव फिल्म के भीतर संवेग प्रभाव की उपेक्षा की है।

चित्र 1

स्तरीय फिल्म संघनन में ऊष्मा स्थानान्तरण गुणांकों की परिभाषा करते समय अन्तःफलकीय प्रतिरोध तथा अन्तःफलकीय आरूपण प्रतिदल का ध्यान रखा जाता है। कला में परिवर्तन होने से आणविक गतिज संहृति तथा स्थानान्तरण के कारण ताप गिरता है जिससे अन्तः फलकीय प्रतिरोध उत्पन्न होता है। अतः अन्तःफलक के सन्निकट वाष्प का संतृप्त ताप द्रव के ताप से भिन्न होता है। मैंडेज्स्की [2] ने दिखाया है कि निम्न वाष्प दाबों पर इस घटना का सार्थक प्रभाव पड़ता है। (चित्र 1)

सिद्धान्त

नीचे की ओर वाष्प प्रवाह के लिये प्रति इकाई चौड़ाई वाली फिल्म में से होकर संघनन (conden sate) के पिंड प्रवाह दर Γ को निर्देश (3, 4) द्वारा दिया जाता है

$$\Gamma=\frac{\rho^2 g\,\delta^3}{3\mu}+\frac{\tau\rho\,\delta^2}{2\mu} \tag{1}$$

अवकल लम्बाई dx से होकर बहने पर संघनज पिंड प्रवाह दर में अवकल वृद्धि

$$d\Gamma=\frac{\rho^2 g}{3\mu}\,d(\delta^3)+\frac{\tau\rho}{2\mu}\,d(\delta^2)$$

अथवा

$$\frac{d\Gamma}{d\delta}=\frac{\rho^2 g\,\delta^2}{\mu}+\frac{\tau\rho\delta}{\mu} \tag{2}$$

और आगे

$$q=\lambda\left[\frac{d\Gamma}{dx}\right]=\lambda\,\frac{d\delta}{dx}\left[\frac{d\Gamma}{d\delta}\right]$$

अथवा

$$q=\frac{\lambda d\delta}{dx}\left[\frac{\rho^2\,g\delta^2}{\mu}+\frac{\tau\rho\delta}{\mu}\right] \tag{3}$$

अन्तःफलकीय ऊष्मा स्थानान्तरण गुणांक को निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं।

$$\beta=\frac{q}{(T_{sat}-T_1)} \tag{4}$$

पुनश्च

$$q=\frac{K}{\delta}\,(T_1-T_w)=(T_{sat}-T_1)$$

अथवा

$$q=\frac{K\triangle T}{\delta+\frac{K}{\beta}}\quad \text{जहाँ}\quad \triangle T=(T_{sat}-T_w) \tag{5}$$

(3) तथा (5) को तुल्य करने पर

$$\gamma\,\frac{d\delta}{dx}\left[\frac{\rho^2 g\,\delta^2}{\mu}+\frac{\tau\delta\rho}{\mu}\right]=\frac{K\triangle T}{\delta+K/\beta}$$

समाकलित करने तथा सरल करने पर

$$\left(\frac{\rho^2 g\lambda}{4\mu k\triangle T}\right)\delta^4+\left[\frac{\tau\rho\lambda}{3\mu k\triangle T}+\frac{\rho^2 g\lambda}{3\mu k\triangle T}\left(\frac{K}{\beta}\right)\right]\delta^3+\frac{\tau\rho\lambda}{2\mu k\triangle T}\left(\frac{k}{\beta}\right)\delta^2=X \tag{6}$$

निम्नांकित विमाहीन अंकों को परिभाषित करने पर

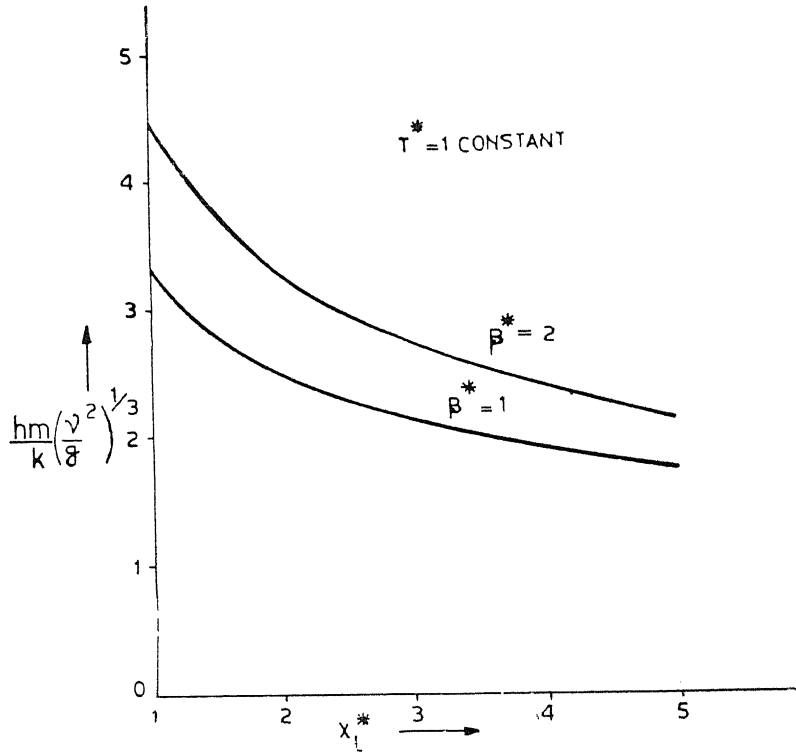
$$\delta^*=\frac{\delta}{(V^2/g)^{1/3}}$$

$$\tau^*=\frac{\tau}{\rho g}\left(\frac{g}{\nu^2}\right)^{1/3}$$

$$\beta^*=\frac{K}{\beta}\left(\frac{g}{\nu^2}\right)^{1/3}$$

$$x^*=\frac{4X\triangle T\, C_p}{Pr.\ \lambda}\left(\frac{g}{\nu^2}\right)^{1/3}$$

हमें (8) प्राप्त होता है ।

$$\delta^{*4}+\frac{4}{3}\delta^{*3}(\beta^*+\tau^*)+2\delta^{*2}(\beta^*\tau^*)=X^* \tag{8}$$

चित्र 2

समीकरण (8) से dx^* का मान निकालने पर तथा

$$h_m = \frac{1}{X_L} \int_0^{XL} \left(\frac{K}{\delta}\right) dX$$

प्राप्त करके, जिसको विस्तार नहीं दिया जा रहा हम

$$\frac{hm}{k}\left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3} = \frac{4}{3}\,\frac{(\delta L^*)^3}{X_L^*} + 2\,\frac{(\delta L^*)^2}{X_L^*}\,(\beta^* + \tau^*) + 4\,\frac{(\delta L^*)}{X_L^*}\,\beta^* \tau^* \tag{9}$$

प्राप्त करेंगे जहाँ

$\delta = \delta_L$ $X = X_L$ पर

समीकरण (8) तथा (9) के मध्य δ_L^* का विलोपन करने से फल प्राप्त होते हैं जो नीचे दिये गये हैं ।

निष्कर्ष

चित्र 2 में ऊष्मा स्थानान्तरण गुणांक को विमाहीन संख्या के रूप में आलेखित किया गया है और इसके विचरण का पट्टिका की विमाहीन लम्बाई की दिशा में प्रदर्शित किया गया है

स्पष्ट है कि लम्बाई में वृद्धि के साथ ही गुणांक घटता जाता है और ज्यों ज्यों गुणांक बढ़ते हैं अन्त:फलकीय ऊष्मा-स्थानान्तरण भी बढ़ता जाता है ।

निर्देश

1. रोजेनको, डब्लू० एम०, बेबर, जे० एच० तथा लिंग, ए० टी०, Trans. ASME, 1956, **78,** 1937-44.

2. मैडेज्स्की, जे० **Int. J. Ht. Mass Transfer**, 1966, **9**, 35-39,

3. रोजेनो, डब्लू० एम० तथा च्वा, एच० वाई० Heat, Mass and Momentm Transfer: **प्रेन्टिस हाल** 1961, पृष्ठ 238-46.

4. अग्रवाल, जी० के०, **विज्ञान परि० अनु० पत्रिका**, 1975, **18**, 209-13

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 4, October, 1976, Pages363-375

सार्वीकृत बहुक परिवर्त पर कुछ प्रमेय

वाई० एन० प्रसाद तथा एस० एन० सिंह
सम्प्रयुक्त गणित अनुभाग, टेक्नालॉजी इंस्टीच्यूट, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त – जनवरी 29, 1976]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का विषय सार्वीकृत बहुक परिवर्त सम्बन्धी कतिपय प्रमेयों के प्रतिपाद्य एवं उपपत्तियाँ है। इस प्रपत्र में उल्लिखित प्रमेयों से मुकर्जी तथा प्रसाद, श्रीवास्तव तथा पंडा, प्रसाद तथा सिद्दीकी आदि के फलों का सार्वीकरण होता है। इन प्रमेयों को कतिपय ज्ञात तथा अज्ञात समाकलों के मान निकालने में प्रयुक्त किया जा सकता है। इन प्रमेयों पर आधारित उदाहरणों की भी स्थापना की गई है।

Abstract

On some theorems on the generalized multiple transform. *By* Y. N. Prasad and S. N. Singh, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, B. H. U., Varanasi.

The present paper deals with the statements and proofs of certain theorems on generalized multiple transform. The theorems stated in this paper do generalize several known results due to Mukherjee and Prasad (1973), Srivastava and Panda (1973), Prasad and Siddiqui (1974), etc. These theorems can be used frequently to evaluate certain known and unknown integrals involving the product of *H*-function and other special functions. Examples based upon these theorems have also been established.

1. विषय प्रवेश

हम सार्वीकृत बहुक परिवर्त को निम्न रूप में परिभाषित करते हैं :

$$\phi(t)=Mt[f(x_1, x_2, \ldots, (x_r)]$$

$$=\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} x_j^{\alpha j-1} \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma}$$

$$\times H_{u,\, v}^{f,\, g}\left[\lambda \left| \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_1} \right| \begin{matrix} \{(A_u, \eta_u)\} \\ \{(B_v, \xi_v)\} \end{matrix} \right]$$

$$\times H_{p,\, q}^{m,\, n}\left[t \sum_{j=1}^{r} x_j^{\beta j} \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_2} \right|$$

$$\left. \begin{matrix} \{(c_p, \gamma_p)\} \\ \{(d_q, \delta_q)\} \end{matrix} \right] f(x_1, x_2, \ldots, x_r) \sum_{j=1}^{r} dx_j,$$

बशर्ते कि $0 \leqslant m \leqslant q,\ 0 \leqslant n \leqslant p,\ 0 \leqslant f \leqslant v,\ 0 \leqslant g \leqslant u;\ R(a_j),\ R(\beta_j) > 0,\ (j=1, 2, \ldots, r);$

$\sigma_1, \sigma_2 \geqslant 0; \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} > 0$; प्रत्येक $x_j > 0, (j=1, 2, \ldots, r);\ |\arg \lambda| < \frac{1}{2}U,\ U > 0$

जहाँ $$U = \sum_{j=1}^{f} \xi_j - \sum_{j=f+1}^{v} \xi_j + \sum_{j=1}^{\zeta} \eta_j - \sum_{j=g+1}^{u} \eta_j;$$

$$-\delta < R\left(\frac{\sigma}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1} \sum_{j=1}^{r} \frac{a_j}{p_j}\right) < -\beta;\ \delta = \min R(B_j/\xi_j), (j=1, 2, \ldots, f);$$

$\beta = \max R\left(\frac{A_j - 1}{\eta_i}\right), (i=1, 2, \ldots, g)$ तथा $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ ऐसा है कि बहुक समाकल का अस्तित्व रहे।

2. प्रमेयों का प्रतिपाद्य तथा उपपत्ति

प्रमेय 1

यदि $\phi(t) = MT[f(x_1, x_2, \ldots, x_r)]$ और यदि $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)\ g(z_1, z_2, \ldots, z_r)$ का बहुक लैप्लास परिवर्त हो तो

$$\phi(t) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N \prod_{j=1}^{r} a_j^{\alpha j + N}}{LN \sum_{j=1}^{r} p_j} \left(\frac{\lambda - k}{\sigma_1}\right) H_{p+r+v,\, q+u+1}^{m+g,\, r+n+f}\Bigg[\tag{2.1}$$

$$t \prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta j} \lambda^{-k'} \left| \begin{matrix} \left(1 - \frac{a_1 + N}{p_1}, \frac{\beta_1}{p_1}\right) \ldots, \left(1 - \frac{a_r + N}{p_r}, \frac{\beta_r}{p_r}\right) \{(c_n, \lambda_n)\}, \\ \{(d_m, \delta_m)\}, \{(1 - A_u - K\eta_u, K'\eta_u), (d_{m+1}, \delta_{m+1}) \end{matrix} \right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{(1-B_v-K\xi_v, K'\xi_v)\}, (c_{n+1}, \gamma_{n+1}), \ldots, (c_p, \gamma_p) \\ \ldots, (d_q, \delta_q), (1+\sigma-K\sigma_1, K'\sigma_1-\sigma_2)\end{matrix}\right]$$

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \prod_{j=1}^r z_j^N \, g(z_1, z_2, \ldots, z_r) \prod_{j=1}^r dz_j,$$

बशर्ते कि $K=\frac{1}{\sigma_1}\left(\sigma+\sum_{j=1}^r \frac{a_j+N}{p_j}\right)$; $K'=\frac{1}{\sigma_1}\left(\sigma_2+\sum_{j=1}^r \frac{\beta_j}{p_j}\right)$; (1.1) में कथित प्रतिबन्ध तुष्ट हों तथा बहुक समाकल

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \prod_{j=1}^r z_j^N \, g(z_1, z_2), \ldots, z_r) \prod_{j=1}^r dz_j$$ का अस्तित्व रहे ।

उपपत्ति :

बहुक लैप्लास परिवर्त के द्वारा

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r)=\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \exp\left\{-\sum_{j=1}^r (x_j z_j)\right\} g(z_1, z_2, \ldots, z_r) \prod_{j=1}^r dz_j$$

(1.1) में $f(x_1, x_2 \ldots, x_r)$ का मान रखने और x और z बहुक समाकलों के क्रम को बदलने पर, जो दिये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है

$$\phi(t)=\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g(z_1, z_2, \ldots, z_r) \prod_{j=1}^r dz_j \tag{2.2}$$

$$\times \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \exp\left\{-\sum_{j=1}^r (x_j z_j)\right\} \prod_{j=1}^r x_j^{a_j-1} \left\{\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^\sigma$$

$$\times H_{u, v}^{f, g}\left[\lambda\left\{\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_1} \middle| \begin{matrix}\{(A_u, \eta_u)\} \\ \{(B_v, \xi_v)\}\end{matrix}\right] \times$$

$$H_{p, q}^{m, n}\left[t \prod_{j=1}^r x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_2} \middle| \begin{matrix}\{(c_p, \gamma_p)\} \\ \{(d_q, \delta_q)\}\end{matrix}\right] \prod_{j=1}^r dx_j$$

अब $\exp\left\{-\prod_{j=1}^{r}(x_j z_j)\right\}$ का घात श्रेणी प्रसार निम्नांकित ज्ञात समाकल [5] की सहायता से पदशः समाकल करने पर

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} x_j^{\alpha j-1} \left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma} H_{u,\ v}^{f,\ g}\left[\lambda\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_1}\middle|\begin{matrix}\{(A_u,\ \eta_u)\}\\ \{(B_v,\ \xi_v)\}\end{matrix}\right]$$

$$\times H_{p,\ q}^{m,\ n}\left[t\prod_{j=1}^{r} x_j^{\beta j}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_2}\middle|\begin{matrix}\{(c_p,\ \gamma_p)\}\\ \{(d_q,\ \delta_q)\}\end{matrix}\right]\prod_{j=1}^{r} dx_j$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{r} a_j^{\alpha j}}{\prod_{j=1}^{r} p_j}\left(\frac{\lambda^{-k}}{\sigma_1}\right) H_{p+r+v,\ q+u+1}^{m+g,\ r+n+f}\left[t\prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta j}\ \lambda^{-k'}\right.$$

$$\left|\begin{matrix}\left(1-\frac{\alpha_1}{p_1},\frac{\beta_1}{p_1}\right),\ \ldots,\left(1-\frac{\alpha_r}{p_r},\ \frac{\beta_r}{p_r}\right),\ \{(c_n,\ \gamma_n)\},\ \{(1-B_v-K\xi_v,\ K'\xi_v)\},\\ \{(d_m,\ \delta_m)\},\ \{(1-A_u-K\eta_\mu,\ K'\eta_\eta)\},\ (d_{m+1},\ _{m+1}),\ \ldots,\ (d_q,\ \delta_q),\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(c_{n+1},\ _{n+1}),\ \ldots,\ (c_p,\ \gamma_p)\\ (1+\sigma-K\sigma_1,\ K'\sigma_1-\sigma_2)\end{matrix}\right] \tag{2.3}$$

बशर्ते कि $K=\frac{1}{\sigma_1}\left(\sigma+\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha j}{p_j}\right)$; $K'=\frac{1}{\sigma_1}\left(\sigma_2+\sum_{j=1}^{r}\frac{\beta j}{p_j}\right)$ $\sigma_1,\ \sigma_2\geqslant 0$;

$R(\alpha_j,)R(\beta_j)>0,\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$ प्रत्येक $x_j>0,\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$;

$\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}>0$; $-\delta<R\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha j}{p_j}\right)<-\beta$; $\delta=min\ R(B_j/\xi_j),\ (j=1,2,\ldots,f)$;

$\beta=max\ R\left(\frac{A_i-1}{\eta_i}\right),\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ g)$; $|\arg\lambda|<\frac{1}{2}U\pi$,

$U>0$ जहाँ $U=\sum_{j=1}^{f}\xi_j-\sum_{j=f+1}^{v}\xi_j+\sum_{j=1}^{\xi}\eta_j-\sum_{j=g+1}^{u}\eta_j$.

फल (2.3) की उपपत्ति एडवर्ड [7] के फल पर आधारित है अर्थात्

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha j-1} f\left\{\sum_{j=1}^{n}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}\prod_{j=1}^{n} dx_j$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j^{\alpha j} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\alpha j}{p j}\right)}{\prod_{j=1}^{n} p_j \, \Gamma\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{p_j}\right)} \int_0^\infty z^{\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha j}{p_j}\right)-1} f(z)dz,$$

जहाँ $\sum_{j=1}^{n} (x_j/a_j)^{p_j}$ 0 तथा ∞ के बीच स्थित है तथा प्रत्येक $x_j>0$, $(j=1, 2 \ldots, n)$ ।इस प्रकार प्रमेय (2.1) की उपपत्ति पूरी हुई ।

उपप्रमेय 1

यदि $r=1$, $a_1=1=p_1=\sigma_1$ मानें तो हमें मुकर्जी तथा प्रसाद का प्रमेय [2] प्राप्त होता है।

उपप्रमेय 2

यदि $r=2$, $a_1=a_2=1=p_1=p_2=\sigma_1$ मानें तो प्रसाद तथा सिद्दीकी की [4] का प्रमेय प्राप्त होता है ।

(2.1) की विशिष्ट दशा

$g(z_1, z_2, \ldots, z_r)=g(z_1)$ मानें तथा फलस्वरूप $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)=f(x_1)$, तो हमें (2.1) निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है :

यदि $\phi(t)=MT[f(x_1)]$ तथा $f(x_1)\, g(z_1)$ का लैप्लास परिवर्त हो तो

$$\phi(t)=\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N a_1^N}{N!} \left(\frac{\lambda-k}{\sigma_1}\right) \frac{\prod_{j=1}^{r} a_j^{\alpha j}}{\prod_{j=1}^{r} p_j} \quad H_{p+r+v,\, q+u+1}^{m+g,\, r+n+f} \Bigg[\tag{2.4}$$

$$t \sum_{j=1}^{r} a_j^{\beta j} \lambda^{-k'} \left| \begin{matrix} \left(1-\frac{\alpha_1+N}{p_1}, \frac{\beta_1}{p_1}\right), \left(1-\frac{\alpha_2}{p_2}, \frac{\beta_2}{p_2}\right), \ldots, 1-\frac{\alpha_r}{p_r}, \frac{\beta_r}{p_r}\right), \\ \{(d_m, \delta_m)\}, \{(1-A_u-K\eta_u, K'\eta_u)\}, (d_{m+1}, \delta_{m+1}), \ldots \end{matrix}\right.$$

$$\left. \begin{matrix} \{(c_n, \gamma_n)\}, \{(1-B_v-K\xi_v, K'\xi_v)\}, (c_{n+1}, \gamma_{n+1}), \ldots, (c_p, \gamma_p) \\ \ldots, (d_q, \delta_q), (1+\sigma-K\sigma_1, K'\sigma_1-\sigma_2) \end{matrix} \right] \int_0^\infty z_1^N \, g(z_1) \, dz_1,$$

जहाँ $$K=\frac{1}{\sigma_1}\left(\sigma+\frac{N}{p_1}+\sum_{j=1}^{r} \frac{\alpha_j}{p_j}\right); \; K'=\frac{1}{\sigma_1}\left(\sigma^2+\sum_{j=1}^{r} \frac{\beta_j}{p_j}\right);$$

(1.1) के उपयुक्त समस्त प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं और $\int_0^\infty z_1^N\, g(z_1)dz_1$ का अस्तित्व होता है।

उदाहरण

माना कि $g(z_1)=z_1^{-\mu-1/2}\, K_{\nu+1/2}\, (bz_1)$ तो एर्डेल्यी (2 तथा 26 p. 270 तथा 331, 1954) की सहायता से

$$f(x_1)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1-\mu)\,\Gamma(-\nu-\mu)}{(2b)^{1/2}}\,(x_1^2-b^2)^{\mu/2}\;P_\nu^\mu\,(x_1/b), \tag{2.5}$$

जहाँ $R(\mu)-1<R(\nu)<-R(\mu)$, तथा

$$\int_0^\infty z_1^N\, g(z_1)dz_1=b^{\mu-1/2-N}\,2^{-\mu-3/2+N}\;\Gamma\left(\frac{-\nu-\mu+N}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1+N}{2}\right) \tag{2.6}$$

(2.4) में (2.5) तथा (2.6) के मान रखने पर

$$\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty (x_1^2-b^2)^{b/2}\,P_\nu^b\,(x_1/b)\prod_{j=1}^r x_j^{a_j-1}\left\{\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^\sigma$$

$$\times H_{u,v}^{f,g}\left[\lambda\left\{\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_1}\left|\begin{matrix}\{(A_u,\eta_u)\}\\ \{(B_v,\xi_v)\}\end{matrix}\right.\right] H_{p,q}^{m,n}\left[t\prod_{j=1}^r x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=1}^r (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_2}\right.$$

$$\left.\left|\begin{matrix}\{(c_p,\gamma_p)\}\\ \{(d_q,\delta_q)\}\end{matrix}\right.\right]\prod_{j=1}^r dx_j=\frac{(2b)^{1/2}\,b^{b-1/2}\,2^{b-3/2}\prod_{j=1}^r a_j^{a_j}}{\pi^{1/2}\,\Gamma(\nu-\mu+1)\,\Gamma(-\nu-\mu)\prod_{j=1}^r p_j}\,\frac{1}{\sigma_1}\prod_{N=0}^\infty\frac{(-1)^N a_1^N}{LN}$$

$$\times\Gamma\left(\frac{-\nu-\mu+N}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1+N}{2}\right)\lambda^{-k}\,H_{p+r+v,\;q+u+1}^{m+g,\;r+n+f}\left[t\prod_{j=1}^r a_j^{\beta_j}\,\lambda^{-k'}\right.$$

$$\left|\begin{matrix}\left(1-\frac{a_1+N}{p_1},\frac{\beta_1}{p_1}\right),\left(1-\frac{a_2}{p_2},\frac{\beta_2}{p_2}\right),\ldots,\left(1-\frac{a_r}{p_r},\frac{\beta_r}{p_r}\right)\{(c_n,\gamma_n)\},\\ \{(d_m,\delta_m)\},\{(1-A_u-K\eta_u,K'\eta_u)\},(d_{m+1},\delta_{m+1}),\ldots,(d_q,\delta_p),\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{(1-B_v-K\xi_v,K'\xi_v)\}\,(c_{n+1},\gamma_{n+1}),\ldots,(c_p,\gamma_p)\\ (1+\sigma-K\sigma_1,K'\sigma_1-\sigma_2)\end{matrix}\right]$$

जहाँ $R(\mu)-1<R(\nu)<-R(\mu)$; K तथा K' पूर्ववत् हैं तथा (1.1) के उपयुक्त प्रतिबन्धों की तुष्टि हो जाती है।

प्रमेय 2

यदि $\phi(t)=MT[f(x_1)]$, जहाँ $f(x_1)$ $g(z_1)$ का हैंकेल परिवर्त है तो

$$\phi(t)=\frac{\prod_{j=1}^{r} a_j^{\alpha j}}{\prod_{j=1}^{r}}\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N}{LN}\frac{2^{-\nu-2N}}{\Gamma(1+\nu+N)}a_1^{-\nu+1/2+2N}\lambda^{-k}$$

$$\times H^{m+g,\,r+n+f}_{p+r+v,\,q+u+1}\left[t\prod_{j=1}^{r}a_j^{\beta j}\lambda^{-K'}\begin{matrix}\left(1-\frac{\alpha_1+\nu-\frac{1}{2}+2N}{p_1},\frac{\beta_1}{p_1}\right)\left(1-\frac{\alpha_2}{p_2},\frac{\beta_2}{p_2}\right),\ldots\\ \{(d_m,\delta_m)\},\{(1-A_u-K\eta_u,K'\eta_u)\},\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\ldots,\left(1-\frac{\alpha_r}{p_r},\frac{\beta_r}{p_r}\right),\{(c_n,\gamma_n)\},\{(1-B_v-K\xi_v\,K'\xi_v)\},(c_{n+1},\gamma_{n+1}),\ldots,(c_p,\gamma_p)\\(d_{m+1},\delta_{m+1}),\ldots,(d_q,\delta_q),(1+\sigma-K\sigma_1,K'\sigma_1-\sigma_2)\end{matrix}\right]$$

$$\times\int_0^\infty z_1^{\nu+1/2+2N}g(z_1)dz_1,$$

जहाँ $K=\frac{1}{\sigma_1}\left(\sigma+\frac{\nu+\frac{1}{2}+2N}{p_1}+\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha j}{p j}\right)$; $K'=\frac{1}{\sigma_1}\left(\sigma_2+\sum_{j=1}^{r}\frac{\beta j}{p j}\right)$; $R(\alpha_1+\nu+\frac{1}{2})>0$; $\sigma_1,\sigma_2\geqslant0$;

$R(\alpha_j)$, $R(\beta_j)>0$, $(j=1,2,\ldots,r)$: प्रत्येक $x_j>0$, $(j=1,2,\ldots,r)$;

$$\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{pj}>0;\quad -\delta<R\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_1}\frac{\nu+\frac{1}{2}}{p}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha j}{p j}\right)<-\beta;$$

$|\arg\lambda|<\frac{1}{2}U\pi$, $U>0$: δ, β, U पूर्ववत् हैं और (2.7) का दक्षिण पक्ष ऐसा है कि समाकल

$$\int_0^\infty z_1^{\nu+1/2+2N}g(z_1)dz_1,\ N\geqslant0 \text{ का अस्तित्व हो।}$$

उपपत्ति :

पहले की भाँति

$$f(x_1)=\int_0^\infty (x_1z_1)^{1/2}J_\nu(x_1z_1)\,g(z_1)dz_1,$$

जिसे (1.1) में इस प्रतिबन्ध के साथ प्रतिस्थापित करने पर कि समाकलन के क्रम में परिवर्तन वैध है, प्रतिस्थापित करने से

$$\phi(t)=\int_0^\infty z_1^{1/2}\, g(z_1)dz_1 \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty x_1^{1/2}\, J_\nu(x_1 z_1) \prod_{j=1}^{r} x_j^{\alpha j-1} \tag{2.8}$$

$$\left\{\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{pj}\right\}^{\sigma} H_{u,\,v}^{f,\,g}\left[\lambda\left\{\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{pj}\right\}^{\sigma_1} \middle| \begin{matrix}\{(A_u,\ \eta_u)\}\\ \{B_v,\ \xi_v)\}\end{matrix}\right]$$

$$H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[t \prod_{j=1}^{r} x^{\beta j}_{j=1} \left\{\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{pj}\right\} \middle| \begin{matrix}\{(c_p,\ \gamma_p)\}\\ \{(d_q,\ \delta_q)\}\end{matrix}\right] \prod_{j=1}^{r} dx_j$$

प्रदान करता है। अब $J_\nu(x_1 z_1)$ के लिये श्रेणी प्रसार

$$J_\nu(x_1 z_1)=\sum_{N=0} \frac{(-1)^N\,(\frac{1}{2}x_1 z_1)^{\nu+2N}}{LN\,\Gamma(\nu+1+N)} \tag{2.9}$$

का मान (2.8) में रखने पर तथा ज्ञात फल की सहायता से बहुक समाकल का मान निकालने पर हमें प्रमेय प्राप्त होता है।

(2.8) में समाकल के क्रम को बदलने की वैधता सिद्ध करने के लिये हम पहले देखेंगे कि

$$J_\nu(x_1)=\begin{cases}0(x_1) & \text{लघु } x_1 \text{ के लिये}\\ 0(x_1^{-1/2}) & \text{दीर्घ } x_1 \text{ के लिये}\end{cases}$$

बहुक समाकल (2.7) पूर्णतया अभिसारी होगा यदि

$$R(\alpha_1+\nu+\tfrac{1}{2})>0;\ \sigma_1,\ \sigma_2\geqslant 0;\ R(\alpha_j),\ R(\beta_j)>0,\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ r);$$

$$-\delta<R\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j}{p_j}\right)<-\beta,$$ जहाँ $\delta,\ \beta$ पूर्ववत हैं।

(2.8) में z_1 समाकल पूर्णतया अभिसारी होगा यदि समाकल

$$\int_0^\infty z_1^{1/2}\, g(z_1)dz_1$$ तथा $$\int_0^\infty z_1^{\nu+1/2+2N}\, g(z_1)dz_1$$ का अस्तित्व हो।

अतः कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समाकलन के क्रम का प्रतिलोमन वैध है बशर्ते कि परिणामी समाकल (2.8) पूर्णतः अभिसारी हो।

उपप्रमेय 1

यदि $r=1,\ a_1=1=p_1=\sigma_1$, मानें तो हमें मुकर्जी तथा प्रसाद का प्रमेय [2] प्राप्त होगा।

उपप्रमेय 2

यदि $r=2, a_1=a_2=1=p_1=p_2=\sigma_1$, मानें तो प्रसाद तथा सिद्दीकी [4] का प्रमेय प्राप्त होगा ।

उदाहरण

माना $g(z_1)=Z_1^{-1/2} \exp(-a\, z_1)\, J_\nu(bz_1)$ । फिर एर्डेल्यी (17, p. 50, 1954) की सहायता से हमें

$$f(x_1)=\frac{1}{\pi}\, b^{-\frac{1}{2}}\, Q_{\nu-1/2}\left(\frac{a^2+b^2+x_1^2}{2bx_1}\right), \tag{2.10}$$

प्राप्त होता है यदि

$$R(a)>\text{Imag}\,(b)>0;\ R(\nu)>-\tfrac{1}{2}.$$

एर्डेल्यी (6, p. 327, 1954) के अनुसार भी

$$\int_0^\infty z_1^{\nu+1/2+2N}\, g(z_1)dz_1=\frac{b^\nu\Gamma(2\nu+1+2N)}{2^\nu\, a^{2\nu+2N}\,\Gamma(\nu+1)}\ {}_2F_1\left[\nu+\tfrac{1}{2}+N,\ \nu+1+N;+1;-\frac{b^2}{a^2}\right], \tag{2.11}$$

बशर्ते कि $\quad R(a)>\text{Imag}\,(b)>0;\ R(\nu)>-\tfrac{1}{2}.$

अब (2.7) में (2.10) तथा (2.11) के मान रखने पर हमें

$$\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty Q\nu-\tfrac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2+x_1^2}{2bx_1}\right)\prod_{j=1}^{r} x_j^{a_j}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_2}$$

$$H_{u,\ v}^{f,\ g}\left[\lambda\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_1}\left|\begin{matrix}\{(A_u,\ \eta_u)\}\\ \\ \{(B_v,\ \xi_v)\}\end{matrix}\right.\right] H_{p,\ q}^{m,\ n}\left[t\prod_{j=1}^{r} x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma}\right.$$

$$\left.\left|\begin{matrix}\{(c_p,\ \gamma_p)\}\\ \{(d_q,\ \delta_q)\}\end{matrix}\right.\right]\prod_{j=1}^{r} dx_j=\frac{\pi b^{\nu+1/2}\prod_{j=1}^{r} a_j^{a_j}}{2^{2\nu}\,\Gamma(\nu+1)\prod_{j=1}^{r} p_j}\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N\, 2^{-2N}}{LN\,\Gamma(\nu+1+N)}\, a_1^{\nu+1/2+2N}$$

$$\times H_{l+r+v,\ q+u+1}^{m+g,\ r+n+f}\left[t\prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta_j}\,\lambda^{-K'}\left|\begin{matrix}\left(1-\frac{a_1+\nu+\frac{1}{2}+2N}{p_1},\frac{\beta_1}{p_1}\right)\left(1-\frac{a_2}{p_2},\frac{\beta_2}{p_2}\right),\ \ldots\\ \{(d_m,\ \delta_m)\},\ \{(1-A_u-K\eta_u,\ K'\eta_u)\},\end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\ldots,\left(1-\frac{a_r}{p_r},\frac{\beta_r}{p_r}\right)\{(c_n,\ \gamma_n)\}\ \{(1-B_v-K\xi_v,\ K'\xi_v)\},\ (c_{n+1},\ \gamma_{n+1}),\ldots,\ (c_p,\ \gamma_p)\\ (d_{m+1},\ \delta_{m+1}),\ \ldots\ (d_q,\ \delta_q),\ (1+\sigma-K\sigma_1,\ K'\sigma_1-\sigma_2)\end{matrix}\right]$$

प्राप्त होते हैं बशर्ते कि $R(a) > \text{Imag}\,(b) > 0$; $R(v) > -\frac{1}{2}$ तथा (2.7) के उपयुक्त प्रतिबन्धों की तुष्टि होती हो।

प्रमेय 3

यदि $\phi(t) = MT[f(x_1)]$ तथा $f(x_1)$ रूपनारायण [6] के द्वारा प्राप्त $\chi\nu_1, k_1, m_1$ परिवर्त में आत्म व्युत्क्रम हो तो

$$\phi(t) = \frac{\prod_{j=1}^{r} a_j^{\alpha j}}{\prod_{j=1}^{r} p_j} \left(\frac{1}{\sigma_1}\right) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N\, 2^{-\nu_1-2N}\, a_1^{-\nu_1+1/2+2N}}{LN\, \Gamma(\nu_1+1+N)} \tag{2.12}$$

$$\frac{\Gamma(2m_1-N)\,\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2}-k_1+m_1+N)}{\Gamma(\nu_1+2m_1+1+N)\,\Gamma(-k_1+m_1+\frac{1}{2}-N)} \lambda^{-k}\, H^{m+g,\; r+n+f}_{p+r+v,\; q+u+1}\left[t \prod_{j=1}^{r} a_j^{\alpha j}\, \lambda^{-K'} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \left(1-\frac{\alpha_1+\nu_1+\frac{1}{2}+2N}{p_1}, \frac{\beta_1}{p_1}\right), \left(1-\frac{\alpha_2}{p_2}, \frac{\beta_2}{p_2}\right), \ldots, \left(1-\frac{\alpha_r}{p_r}, \frac{\beta_r}{p_r}\right), \{(c_n, \gamma_n)\}, \\ \{(d_m, \delta_m)\}, \{(1-A_u-K\eta_u\; k'\eta_u)\}, (d_{m+1}, \delta_{m+1}), \ldots, (d_q, \delta_q), \\ \{(1-B_v-K\xi_v, K'\xi_v)\}, (c_{n+1}, \gamma_{n+1}), \ldots, (c_p, \gamma_p) \\ \qquad (1+\sigma-K\sigma_1, K'\sigma_1-\sigma_2) \end{array} \right] \int_0^\infty z_1^{\nu_1+1/2+2N} f(z_1)\,dz_1,$$

बशर्ते कि $K = \frac{1}{\sigma_1}\left[\sigma + \frac{\nu_1+\frac{1}{2}+2N}{p_1} + \sum_{j=1}^{r}\right]$; $K' = \frac{1}{\sigma_1}\left[\sigma_2 + \sum_{j=1}^{r} \frac{\beta_j}{p_j}\right]$;

$\sigma_1, \sigma_2 \geqslant 0$; प्रत्येक $x_j > 0, (j=1, 2, \ldots, r)$; $-\delta < R\left(\frac{\sigma}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1}\, \frac{\nu_1+\frac{1}{2}}{p_1} + \sum_{j=1}^{r} \frac{\alpha_j}{p_j}\right) < -\beta$;

$\delta = \min R(B_j/\xi_j), (j=1, 2, \ldots, f)$; $\beta = \max R\left(\frac{A_i-1}{\eta_i}\right), (i=1, 2, \ldots, g)$;

$\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} > 0$; $R(\alpha_j), R(\beta_j) > 0, (j=1, 2, \ldots, r)$; $|\arg\lambda| < \frac{1}{2}U\pi, U > 0$

जहाँ $U = \sum_{j=1}^{f} \xi_j - \sum_{j=f+1}^{v} \xi_j + \sum_{j=1}^{g} \eta_j - \sum_{j=g+1}^{u} \eta_j$; $R(\alpha_1+\nu_1+\frac{1}{2}) > 0$ तथा

समाकल $\int_0^\infty z_1^{\nu_1+1/2+2N} f(z_1)\,dz_1$, $N \geqslant 0$, विद्यमान हों।

उपपत्ति

हमें ज्ञात है कि

$$f(x_1)=2^{\nu_1}\int_0^\infty (x_1z_1)^{-\nu_1+1/2}\; H_{2,\,4}^{2,\,1}\left[\frac{x_1^2\; z_1^2}{4}\left|\begin{matrix}(k_1-m_1-\frac{1}{2},\,1)\\(\nu_1,\,1),\,(\nu_1+2m_1,\,1),\end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(\nu_1-k_1+m_1+\frac{1}{2},\,1)\\(-2m_1,\,1),\,(0,\,1)\end{matrix}\right]f(z_1)dz_1.$$

(2.13) में से सम्बन्ध $MT[f(x_1)]$ में $f(x_1)$ का मान रखने पर एवं समाकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर जो दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत बैध है,

$$\phi(t)=2^{\nu_1}\int_0^\infty z_1^{-\nu_1+1/2}f(z_1)dz_1\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty x_1^{-\nu_1+1/2}\sum_{j=1}^{r}x_j^{\alpha_j-1} \tag{2.14}$$

$$\times\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma}H_{u,\,v}^{f,\,g}\left[\lambda\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_1}\left|\begin{matrix}\{(A_u,\,\eta_u)\}\\\{(B_v,\,\xi_v)\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[t\sum_{j=1}^{r}x_j^{\beta j}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_2}\left|\begin{matrix}\{(c_p,\,\gamma_p)\}\\\{(d_q,\,\delta_q)\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times H_{2,\,4}^{2,\,1}\left[\frac{x_1^2\;z_1^2}{4}\left|\begin{matrix}(k_1-m_1-\frac{1}{2},\,1),\,(\nu_1-k_1+m_1+\frac{1}{2},\,1)\\(\nu_1,\,1),\,(\nu_1+2m_1,\,1),\,(-2m_1,\,1)\,(0,\,1)\end{matrix}\right.\right]\prod_{j=1}^{r}dx_j$$

अब मुकर्जी तथा प्रसाद [2] के द्वारा प्राप्त H-फलन के घात श्रेणी प्रसार की सहायता से

$$H_{p,\,q+1}^{m+1,\,n}\left[ax^{\sigma}\left|\begin{matrix}\{(a_p,\,\alpha_p)\}\\(b_0,\,\beta_0),\,\{(b_q,\,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{\beta_0}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\rho_r\,\beta_j)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\rho_r\,\alpha_j)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\rho_r\,\beta_j)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\rho_r\,\alpha_j)}$$

जहाँ $\rho_r=\dfrac{b_0+r}{\beta_0}$; $\beta<R(b_0/\beta_0)<\delta$, $|\arg a|<\frac{1}{2}\lambda\pi$, $\lambda>0$ तथा

$$\lambda=\sum_{j=1}^{m} \beta_j-\sum_{j=m+1}^{q} \beta_j+\sum_{j=1}^{n} \alpha_j-\sum_{j=n+1}^{p} \alpha_j;\ A>0 \text{ तथा } A=\sum_{j=1}^{q} \beta_j-\sum_{j=1}^{p} \alpha_j;$$

हमें

$$H_{2,4}^{2,1}\left[\frac{x_1^2\ z_1^2}{4}\middle| \begin{matrix}(k_1-m_1-\frac{1}{2}, 1), (v_1-k_1+m_1+\frac{1}{2}, 1\\ (v_1, 1), (v_1+2m_1, 1), (-2m_1, 1), (0, 1)\end{matrix}\right] \tag{2.15}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r\ \Gamma(2m_1-r)\ \Gamma(v_1-k_1+m_1+\frac{1}{2}+r)}{Lr\ \Gamma(v_1+1+r)\ \Gamma(v_1+2m_1+1+r)\ \Gamma(-k_1+m_1+\frac{1}{2}-r)} (\tfrac{1}{2}x_1\ z_1)^{2v_1+2r},$$

प्राप्त होता है बशर्ते $R(v_1-k_1+m_1+\frac{1}{2})>0;\ v_1<0<v_1<-2m_1$ तथा $2m_1$ घन पूर्णाङ्क नहीं है।

(2.14) में (2.15) का मान रखने तथा समाकल और संकलन का क्रम परस्पर परिवर्तित करने पर, जो दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है

$$\phi(t)=2^{-v_1} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N\ \Gamma(2m_1-N)\ \Gamma(v_1-k_1+m+\frac{1}{2}+N)}{LN\ \Gamma(v_1+2m_1+1+N)\ \Gamma(v_1+1+N)\ \Gamma(-k_1+m_1+\frac{1}{2}+N)}$$

$$\times\int_0^\infty z_1^{\ v_1+1/2+2N} f(z_1)dz_1 \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty x_1^{\ v_1+1/2+2N} \prod_{j=1}^{r} x_j^{\alpha_j-1} \left\{\prod_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{t_j}\right\}^{\sigma}$$

$$\times H_{u,v}^{f,g}\left[\lambda\left\{\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_1} \middle| \begin{matrix}\{(A_u, \eta_u)\}\\ \{(B_v, \xi_v)\}\end{matrix}\right] H_{p,q}^{m,n}\left[t \prod_{j=1}^{r} x_j^{\beta_j} \left\{\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_2} \middle| \begin{matrix}\{(c_p, \gamma_p)\}\\ \{(d_q, \delta_q)\}\end{matrix}\right] \prod_{j=1}^{r} dx_j$$

अब ज्ञात फल (2.3) की सहायता से बहु समाकल का मान ज्ञात करने पर हमें प्रमेय प्राप्त होता है।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, मैग्नस, डब्लू०, ओबरहेटिंगर, एफ० तथा त्रिकोमी, एफ० जी०, Tables of Integral Transform, भाग I, मैकग्राहिल न्यूयार्क 1954

2. मुकर्जी, एस० एन० तथा प्रसाद, वाई० एन०, मैथ० एजु०, 1973, 7, 98-104

3. श्रीवास्तव एच० एम० तथा रेखा पंडा, Akademic van Wetenschappen Amsterdam Proceedings, 1973, **76** (4), 308-319

4. प्रसाद, वाई० एन० तथा सिद्दीकी, ए०, **ज्ञानाभा** 1974, 4, 119-27.

5. प्रसाद, वाई० एन० तथा सिंह, एस० एन०, **इण्डियन जर्न० प्योर एप्लाइड मैथ०** (स्वीकृत)

6. रूपनारायण, **Univ.** epolilec. Tornonto Rend. Sem. Mat., 1956-57, **16**, 269-300.

6. एडवर्ड, जे० : A Treatise on the Integral Calculus, **भाग** II. **चेल्सिया पब्लिशिंग कं० न्यूयार्क**, 1954.

Vijnana Parihsad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 4, October, 1976, Pages, 377-380

पारिजात के पुष्पों के फ्लेवोनाइडों का अध्ययन

एस० के० गुप्ता तथा एम० एम० बोकाड़िया
विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—जनवरी 2, 1976]

सारांश

पारिजात के पुष्पों के दलपुजों के निष्कर्ष का सान्द्रीकरण करने और फिर ठण्डा किए जाने पर *D*-मैनीटॉल की प्राप्ति की गई। मैनीटॉल के पृथक्करण के उपरान्त बचे मातृद्रव में ग्लूकोस की उपस्थिति ज्ञात की गई। वर्णलेखी विश्लेषण द्वारा दो फ्लेवोनाइडों की उपस्थिति निश्चित की गई। उनमें से एक अस्ट्रेगलिन (I) प्रमाणित हुआ तथा दूसरे का निकोटिफ्लोरिन (II) होना प्रस्तावित किया गया।

Abstract

Flavonoids from the flowers of Nyctanthes-arbor-tristis Linn. *By* S. K. Gupta and M. M. Bokadia, Vikram University, Ujjain.

D-mannitol has been obtained by cooling of the concentrated extract of the coloured corolla tube of the flowers of Nyctanthes-arbor-tristisL inn. Presence of two flavonoids has been detected by chromatography of the extract. One of them has been isolated and characterised as Astraglin (I) and second has been proposed to be nicotiflorin (II).

निक्टेन्थस-अरबोर ट्रिस्टिस-लिन (हिन्दी : पारिजात तथा हरसिंगार) ओलिएसी परिवार का सदस्य है। यह छोटे तने वाला शाखायुक्त पेड़ होता है जिसके पीले-नारंगी दलपुंज युक्त श्वेत पुष्पों में विशिष्ट मधुर सुगंध होती है। इसे उद्यानों में सुगन्ध एवम् सुन्दरता हेतु लगाया जाता है। मध्य प्रदेश के जंगलों में भी यह बहुतायत में पाया जाता है। इसकी तीक्ष्ण पत्तियों और बीजों को आयुर्वेद में उपचार हेतु प्रयोग किया जाता है[1]। हाल ही में सेन तथा सिंह[2] ने इसकी पत्तियों से दो फ्लेवोनाइड प्राप्त कर उनका विशिष्टीकरण किया है, किन्तु इसके पीले-नारंगी दलपुंजों युक्त पुष्पों के सम्बन्ध में कोई उल्लेख प्राप्त नहीं है। प्रस्तुत शोध पत्र में इस उद्देश्य की पूर्ति हेतु किये कार्य का उल्लेख है।

प्रयोगात्मक

1. मैनीटाल की प्राप्ति

पारिजात के पीले-नारंगी दलपुंजों को ऐसीटोन तथा ऐल्कोहल से निष्कर्षित किया गया। दोनों विलायकों में प्राप्त निष्कर्ष को मिलाकर अल्पदाब पर आसवित कर सान्द्र किया गया। इस सान्द्र विलयन को ठण्डे में रखने पर एक श्वेत पदार्थ प्राप्त हुआ जो रासायनिक अभिक्रियाओं, द्रवणांक, प्रामाणिक नमूने के साथ संयुक्त द्रवणांक तथा इसके ऐसीटिल व्युत्पन्न के द्रवणांक तथा संयुक्त द्रवणांक द्वारा *D* मैनीटॉल प्रतीत हुआ जो कि निम्नलिखित आधारों से और प्रमाणित होता है।

1. विश्लेषणात्मक परिणाम :

प्राप्त C, 39.81, H, 7.84, $C_6H_{14}O_6$ के लिए आवश्यक C, 39.55, H, 7.6%

2. अवरक्त स्पेक्ट्रम :

पोटैशियम ब्रोमाइड में निम्नलिखित बैंड प्रदर्शित करता है।

3450 cm^{-1} (हाइड्राक्सिल समूह के कारण)

3000 cm^{-1}, 1460 cm^{-1} तथा 1370 cm^{-1} (सन्तृप्तता के कारण)

2. मुक्त ग्लूकोस

D-मैनीटॉल के पृथक करने के उपरान्त शेष मातृद्रव मालिश परीक्षण देता है जो कि मुक्त शर्करा की उपस्थिति का द्योतक है। मुक्त शर्करा वर्णलेखी और सहवर्णलेखी द्वारा ग्लूकोस प्रमाणित हुई।

3. फ्लेवोनाइडों का पृथक्करण

मातृद्रव को जल से तनु करके एथिल ऐसीटेट से द्रव-द्रव में निष्कर्षण विधि द्वारा निष्कर्षित किया गया। प्राप्त विलयन से एथिल ऐसीटेट को अल्प दाब पर आसवित कर निकाला गया, विलायक के हटाने पर गहरे भूरे रंग का अवशेष प्राप्त हुआ, जिसमें वर्णलेखी (विलायक नियामक : क्लोरोफॉर्म-मीथेनॉल 7:3 में *Rf* 0.71 तथा *Rf* 0.37) द्वारा दो पदार्थों का होना पाया गया।

बड़े पैमाने पर पृथक्करण क्लोरोफार्म-मीथेनॉल 7:3 द्वारा सिलिका जेल के दण्ड पर किया गया। पहिले कुछ प्रभाजों में अशुद्धि होने से उन्हें ऐसा ही छोड़ दिया। अन्य प्रभाजों को *Rf* मूल्य के आधार पर समूहबद्ध करके एकत्रित किया, तदुपरान्त विलायक को आसवित करने से पदार्थ "अ" (*Rf* 0.7 प्राप्ति 0.05%, द्रवणांक 176-80°) तथा पदार्थ "ब" (*Rf* 0.3) प्राप्त हुये।

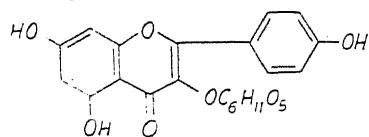
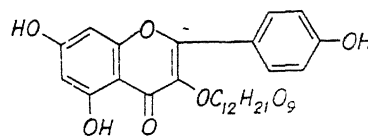
4. पदार्थ "अ" की पहिचान

पदार्थ "अ" गुणात्मक विश्लेषण[3] द्वारा फ्लेवोनॉल ग्लाइकोसाइड पाया गया जिसे निम्नलिखित आधारों पर अस्ट्रेगलिन (केम्फेरॉल-3-ग्लूकोसाइड) (I) प्रमाणित किया गया।

1 विश्लेषणात्मक परिणाम :

प्राप्त : C, 56.14, H, 5.09, $C_{21}H_{20}O_{11}$ के लिये आवश्यक C, 56.01, H, 4.88%.

2. पराबैंगनी स्पेक्ट्रम

एथिल ऐल्कोहल में अत्यधिक अवशोषण 265, 300 तथा 351 mu (फ्लेवोनॉल के विशिष्ट अवशोषण) प्राप्त हुये।

चित्र (I)

चित्र (II)

3. अवरक्त स्पेक्ट्रम

नुजुल मल में निम्नलिखित बैंड प्रदर्शित करता है।

1070 cm^{-1} (ईथर बन्ध के कारण)

1700 cm^{-1} (कीटोनीय समूह के कारण)

3300 cm^{-1} (हाइड्राक्सिल समूह के कारण)

4. जल अपघटन

पदार्थ "अ" के जल अपघटन पर एग्लाइकॉन (द्रवणांक 278-80° केम्फेराल का उल्लेखित[3] द्रवणांक 279-80°) प्राप्त होता है तथा शर्करा वर्णलेखी तथा सह-वर्णलेखी द्वारा ग्लूकोस प्रमाणित हुई।

5. पदार्थ "ब" की पहिचान :

वर्णलेखी द्वारा प्राप्त पदार्थ "ब", पदार्थ "अ" पर किये गये परीक्षण[3] करने पर फ्लेवोनॉल ग्लाइकोसाइड प्रमाणित हुआ। यह जल अपघटन करने पर शर्करा परीक्षण देता है तथा पराबैंगनी स्पेक्ट्रम में 265 तथा 345 *mu* पर अत्यधिक अवशोषण प्रदर्शित करता है। अत्यन्त अल्प मात्रा में होने के कारण इसका अधिक अध्ययन न किया जा सका, फिर भी इसके ब्युटेनॉल-ऐसीटिक एसिड-जल विलायक नियामक में *Rf* 0.42 तथा पराबैंगनी अवशोषण के आधार पर इसका निकोटिफ्लोरिन (*II*) होना प्रस्तावित है।

इस पदार्थ का अग्रिम अध्ययन प्रगति पर है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक विश्वविद्यालय अनुदान आयोग, नई दिल्ली का किये गये कार्य के समय उसे प्रदान की गई शोध छात्रवृत्ति के लिए आभारी है।

निर्देश

1. चोपरा नायर आर० एन० एस० एल० तथा चोपरा, आई० सी०, Glossary of Indian Medicinal plants (**एस० आई० आर० नई दिल्ली**) 1956
2. सेन, ए० बी० तथा सिंह, एस० पी०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1956. **41** (3), 1924.
3. गीसमान टी० ए०, 'The Chemistry of Flavonoid Compounds' **सम्पादक गीसमान, पर्गमॉन प्रेस** 1962.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 4, October, 1976, Pages 381-391

मिट्टी के पोषक तत्वों पर सूक्ष्ममात्रिक तत्वों के अवशिष्ट प्रभाव का अध्ययन I

शिव गोपाल मिश्र तथा रामशंकर द्विवेदी

कृषि रसायन अनुभाग, रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—जनवरी 20, 1976]

सारांश

लाल मिट्टी में डाले गये ताम्र के साथ फास्फोरस तथा नाइट्रोजन का प्रभाव न केवल डाले गये तत्वों पर वरन् अन्य सूक्ष्ममात्रिक (लोह, मैंगनीज तथा जिंक) एवं स्थूल तत्वों (कैल्सियम तथा मैग्नीशियम) की उपलब्धि पर 2 वर्ष पश्चात् मक्का परीक्षण-फसल के रूप में उगाकर अध्ययन किया गया। ताम्र, लोह तथा मैंगनीज की उपलब्धि में ताम्र-फास्फोरस अन्योन्य क्रिया के कारण वृद्धि हुई परन्तु सार्थक स्तर तक नहीं। उपलब्ध जिंक सार्थक रूप से बढ़ा। यद्यपि उपलब्ध फास्फोरस केवल निम्न ताम्र संयोगों में ही बढ़ा जबकि उपलब्ध नाइट्रोजन, विनिमेय कैल्सियम तथा मैग्नीशियम विचरणशील रूप से प्रभावित हुये। ताम्र तथा नाइट्रोजन के संयुक्त उपचार लोह तथा जिंक की उपलब्धि में सार्थक वृद्धि प्रकट करते हैं जबकि उपलब्ध फास्फोरस घटा परन्तु प्रभाव सांख्यिकीय दृष्टि से सार्थक नहीं रहा। विनिमेय कैल्सियम तथा मैग्नीशियम और उपलब्ध नाइट्रोजन अधिक नहीं प्रभावित हुये। उपलब्ध लोह की मात्रा दोनों अन्योन्य क्रियाओं, ताम्र-फास्फोरस तथा ताम्र-नाइट्रोजन में प्रथम वर्ष की अपेक्षा 2-3 गुना अधिक रही जबकि उपलब्ध मैंगनीज प्रथम वर्ष के पश्चात् निश्चित की गई मात्रा का केवल 1/3 था।

Abstract

Studies on residual effect of micronutrients on nutrient elements of soil-I. *By* S. G. Misra and R. S. Dwivedi, Agricultural Chemistry section, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

The effect of addition of Cu along with P or N on the availability of not only the elements being added but of other micro (Fe, Mn and Zn) and macronutrients (Ca and Mg) has been studied after two years of growing maize as a test crop in a red soil. Due to Cu × P interaction availability of Cu, Fe and Mn increased but not to the

significant level. Available Zn increased significantly. However available P increased only at low Cu combinations whereas available N, exchangeable Ca and Mg were affected variably. Combined Cu and N treatments led to increase the availability of Fe and Zn to the significant level whereas available P decreeased but the effect was statistically non-significant. Exchangeable Ca and Mg and available N were not affected much. The amount of available Fe has been found to be 2-3 times more in the second year under both the Cu – N and and Cu – P interactions as compared to first year whilst available Mn was only 1/3 the amount analysed after the first year.

मृदा में उपलब्ध तत्वों का निश्चयन संतुलित पादप पोषण के लिये अत्यन्त महत्वपूर्ण है क्योंकि मृदा में उपस्थित उपलब्ध तत्वों एवं पौधों के भोज्य तत्वों की आवश्यकता के आधार पर किसी फसल विशेष के लिये उर्वरक की मात्रा संस्तुत की जा सकती है। मृदा में उपलब्ध तत्वों का ही पौधे उपभोग करते हैं, बदले में वे जड़ें तथा कुछ अन्य कार्बनिक पदार्थ मृदा में छोड़ते हैं जो कि अनुकूल परिस्थितियों में सूक्ष्मजैविक अपघटन द्वारा खनिजीकृत होकर मृदा तत्वों की उपलब्धि में वृद्धि करते हैं। यह वृद्धि इतनी अधिक नहीं होती कि अगली फसल के लिये पर्याप्त हो सके अतः तत्वों की अतिरिक्त मात्रायें डालना आवश्यक होता है। किन्तु डाले गये तत्व किसी मिट्टी में कितने काल तक उपलब्ध होते रहेंगे और मृदा में प्रचुर स्तर बनाये रहने में समर्थ रहेंगे यह ठीक से ज्ञात नहीं है।

प्रस्तुत अध्ययन का उद्देश्य मिट्टी में सूक्ष्ममात्रिक तत्व ताम्र (Cu) के साथ P अथवा N डालकर फसलें उगाते रहने के फलस्वरूप 2 वर्ष बाद मृदा के पोषण स्तर में होने वाले परिवर्तन ज्ञात करना है।

प्रयोगात्मक

ताम्र-न्यून तथा फास्फेट के साथ अनुक्रिया करने वाली मिट्टी बसहरा से एकत्र की गई जिसके कुछ भौतिक व रासायनिक गुणधर्म सारणी 1 में दिये हैं। मिट्टी को चालकर तथा सुखाकर 4 कि०ग्रा० मात्रा मिट्टी के बने गमलों में भरी गई जिनमें पालीथीन का अस्तर गया लगाया था। निम्न उपचार दिये गये।

1. Cu—P अन्योन्य क्रिया हेतु

(*a*) 0, 50, 100 तथा 200 अंश प्रति दस लक्षांश फास्फोरस $Ca(H_2PO_4)_2 H_2O$ (A. R.) grade) के द्वारा घोल के रूप में

(*b*) 0, 10, 25, तथा 50 अंश प्रति दस लक्षांश ताम्र $CuSO_4 . 5H_2O$ (A. R. grade) के द्वारा घोल के रूप में तथा

(*c*) इन्हीं तत्वों के सम्भावित संयोग

2. Cu—N अन्योन्य क्रिया हेतु

(*a*) 0, 10, 25 तथा 50 अंश प्रति दस लक्षांश ताम्र $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ (A. R. grade) के द्वारा घोल के रूप में

(*b*) 0, 100, 200 तथा 400 अंश प्रति दस लक्षांश नाइट्रोजन यूरिया (A. R. grade) के द्वारा घोल के रूप में तथा

(*c*) इन्हीं तत्वों के सम्भावित संयोग

गमलों में मक्का (Composite Kisan variety) उगाया गया तथा अन्ततः 4 पौधे बढ़ने दिये गये और उन्हें विआयनित जल द्वारा समय-समय पर सींचा गया। बुआई के 45 दिन पश्चात् पौधे काटकर भली भाँति धूप तथा ऊष्मक में सुखाये गये। पाइपर [7] द्वारा वर्णित आर्द्र-पाचन विधि से वानस्पतिक पदार्थ को अपचयित करके मानक विधियों द्वारा विभिन्न तत्वों की मात्रायें ज्ञात की गईं। फसल कटने के पश्चात गमलों से मिट्टी के नमूने लेकर मानक विधियों द्वारा विभिन्न तत्वों की उपलब्ध मात्रायें ज्ञात की गईं। यहाँ बात विशेष उल्लेखनीय है कि N, P, K की रंचमात्रा भी ऊपर से नहीं डाली गई। दूसरे वर्ष इन्हीं गमलों में N, P, K @ 120: 60: 60 ppm डालकर पुनः मक्के की फसल उगाई गई तथा प्रथम वर्ष की भाँति 45 दिन के बाद फसल काट ली गई। इस वर्ष जड़ों को भी विलग कर लिया गया। प्रथम वर्ष की भाँति इस वर्ष भी फसल कटने के पश्चात विभिन्न गमलों से मिट्टी के नमूने लिये गये और उनमें विभिन्न तत्वों की मात्रा ज्ञात की गई। Mn, Ca तथा Mg का निश्चयन N NH_4OAc (पी-एच 7.0) के निष्कर्ष में क्रमशः चेंग तथा ब्रे, [1] जैक्सन [2] तथा चेंग और ब्रे [3] की विधियों द्वारा किया गया। उपलब्ध लोह, जिंक तथा फास्फोरस के लिये क्रमशः 1N NH_4OAc (पी-एच 4.8), 1NNH_4-OAc+0.25% डिथीजोन तथा 0.5M $NaHCO_3$ निष्कर्षक से क्रमशः ओल्सन [4] शा तथा डीन [6] एवं ओल्सेन [5] इत्यादि द्वारा वर्णित विधियाँ प्रयोग में लाई गईं। प्राप्त आँकड़ों का साँख्यिकीय विश्लेषण भी किया गया।

परिणाम एवं विवेचना

Cu×P उपचार

मिट्टी में 2 वर्ष पूर्व डाले गये ताम्र तथा फास्फोरस की विभिन्न मात्राओं के कारण उपलब्ध ताम्र की सार्थक वृद्धि देखी गई जो कि ताम्र की अवशिष्टता की द्योतक है। पूर्व संयुक्त उपचार (Cu×P) का प्रभाव इन्हीं तत्वों के पृथक पृथक उपचारों की अपेक्षा अधिक रहा किन्तु यह उपलब्धि प्रथम वर्ष फसलोपरान्त मृदा परीक्षण से प्राप्त उपलब्ध मात्रा की तुलना में कम रही। इससे मिट्टी में डाले गये ताम्र के निरन्तर ह्रास के साथ ही मिट्टी में Cu तथा P के ऐसे संयोगों का आभास मिलता है जो सर्वथा अविलेय न होकर उपलब्ध अवस्था में हैं। पूर्व उपचारित फास्फोरस की निरन्तर बढ़ती मात्राओं से उपलब्ध P में सार्थक वृद्धि इसकी अवशिष्टता का द्योतक है।

सारणी 1

मिट्टी के कुछ भौतिक एवं रासायनिक गुण

पी-एच 6.5 कार्बनिक कार्बन	0.4914%	विनिमेय Mn (अंश प्रतिदस लक्षांश)	26.9
उपलब्ध लोह् (अंश प्रतिदस लक्षांश)	13.6	कैल्सियम कार्बोनेट	0.27 (%)
उपलब्ध ताम्र(अंश प्रतिदस लक्षांश)	0.250	बालू	43.8 (%)
उपलब्ध जिंक (अंश प्रतिदस लक्षांश)	6.40	सिल्ट	28.4 (%)
उपलब्ध नाइट्रोजन (अंश प्रतिदस लक्षांश)	252.0	मृत्तिका	27.8 (%)
उपलब्ध फास्फोरस (अंश प्रतिदस लक्षांश)	8.4		

सारणी 2

Cu—P अन्योन्य क्रियाओं का प्रभाव

सारणी 2.1 उपलब्ध ताम्र (अंश प्रति दस लक्षांश)

	P_0	P_{50}	P_{100}	P_{200}	औसत
Cu_0	0.450	0.200	0.217	0.180	0.262
Cu_{10}	0.533	1.150	1.250	2.833	1.442
Cu_{25}	1.083	1.283	1.833	1.917	1.530
Cu_{50}	2.533	4.733	4.667	4.250	4.046
औसत	1.250	1.842	1.992	2.295	

	Cu	P	$Cu \times P$
S. E.	0.333	0.333	0.667
(C. D.) 5%	0.679	0.679	—

सारणी 2.2 उपलब्ध फास्फोरस (अंश प्रति दस लक्षांश)

	P_0	P_{50}	P_{100}	P_{200}	औसत
Cu_0	34.40	43.47	58.40	84.8	55.25
Cu_{10}	33.60	50.00	65.06	56.80	51.37
Cu_{25}	37.67	91.33	57.06	85.33	67.70
Cu_{50}	29.67	65.90	57.40	53.60	51.50
औसत	33.53	62.67	59.50	70.13	

	Cu	P	Cu×P
S. E.	9.34	9.34	18.68
(C. D.) 5%	—	19.08	—

सारणी 2.3 उपलब्ध लोह (अंश प्रति दस लक्षांश)

	P_0	P_{50}	P_{160}	P_{200}	औसत
Cu_0	82.20	70.67	71.07	71.37	73.82
Cu_{10}	77.23	66.42	74.50	84.08	75.56
Cu_{25}	87.53	78.00	84.92	82.25	83.20
Cu_{50}	50.67	86.07	80.67	81.08	74.62
औसत	74.40	75.29	77.78	79.69	

	Cu	P	Cu×P
S. E.	3.71	3.71	7.41
(C. D.) 5%	7.57	—	—

सारणी 2.4 उपलब्ध मैंगनीज (अंश प्रति दस लक्षांश)

	P_0	P_{50}	P_{100}	P_{200}	औसत
Cu_0	7.72	8.33	8.33	9.54	8.48
Cu_{10}	7.80	9.54	10.75	11.00	9.77
Cu_{25}	8.32	9.80	10.90	12.00	10.25
Cu_{50}	9.60	10.00	11.30	15.75	11.66
औसत	8.36	94.2	10.32	12.07	

	Cu	P	Cu×P
S. E.	0.87	0.87	1.74
(C. D.) 5%	1.78	1.78	—

सारणी 2.5 उपलब्ध जिंक (अंश प्रति दस लक्षांश)

	P_0	P_{50}	P_{100}	P_{200}	औसत
Cu_0	4.26	1.06	1.26	1.33	1.98
Cu_{10}	1.66	1.93	2.06	4.06	2.43
Cu_{25}	0.73	2.06	4.13	2.06	2.24
Cu_{50}	2.73	2.60	1.66	2.20	2.29
औसत	2.34	1.91	2.28	2.41	

	Cu	P	Cu × P
S. E.	0.038	00.38	0.07
(C. D.) 5%	0.08	00.80	0.16

सारणी 2.6 उपलब्ध नाइट्रोजन (अंश प्रति दस लक्षांश)

	P_0	P_{50}	P_{100}	P_{200}	औसत
Cu_0	25.66	275.33	289.33	284.66	276.5
Cu_{10}	275.33	308.00	308.00	275.33	291.67
Cu_{25}	283.00	275.33	284.67	284.67	281.92
Cu_{50}	308.00	298.67	284.67	303.33	298.67
औसत	280.75	219.33	291.67	287.00	

	Cu	P	Cu × P
S. E.	7.97	7.97	15.94
(C. D.) 5%	16.27	16.27	—

सारणी 2.7 विनिमेय कैल्सियम (मिली तुल्यांक /100 ग्राम)

	P_0	P_{50}	P_{100}	P_{200}	औसत
Cu_0	5.40	5.80	5.80	6.20	5.75
Cu_{10}	6.00	6.60	7.20	5.20	6.25
Cu_{25}	7.00	6.60	6.80	7.60	7.00
Cu_{50}	5.80	5.60	5.40	5.80	5.65
औसत	6.05	6.15	6.30	6.20	

	Cu	P	Cu × P
S. E.	0.07	0.07	0,141
(C. D.) 5%	0.14	0.14	0.29

सारणी 2.8 विनमेय मैग्नीशियम (मिली तुल्यांक 100 ग्राम)

	P_0	P_{50}	P_{100}	P_{200}	औसत
Cu_0	2.20	2.80	2.20	2.00	2.30
Cu_{10}	2.20	1.80	1.80	2.00	2.00
Cu_{25}	2.20	1.60	1.80	2.20	1.95
Cu_{50}	2.00	2.00	1.80	2.80	2.15
औसत	2.15	2.05	1.90	2.30	

	Cu	P	$Cu \times P$
S. E.	0.07	0.07	0.14
(C. D.) 5%	0.14	0.14	0.28

उपलब्ध लोह की मात्रा में 2 वर्ष पूर्व डाले गये Cu का धनात्मक एवं सार्थक प्रभाव देखा जाता है। यह मात्रा पहली फसलोपरान्त मृदा से निष्कासित लोह की अपेक्षा 2-3 गुना अधिक रही। संयुक्त उपचार ($Cu \times P$) का प्रभाव धनात्मक होते हुये भी सार्थक नहीं है। दूसरे वर्ष लोह की इस वृद्धि का कारण मिट्टी में मक्के की जड़ों के रहे आने और उनके अपघटन के कारण सम्भव प्रतीत होता है क्योंकि दूसरे वर्ष मक्के की जड़ें भी पृथक कर ली गई !

उपलब्ध Mn की मात्रा पिछले वर्ष की अपेक्षाकृत लगभग एक तिहाई ही रही। उपलब्ध लोह का अधिक होना तथा उपलब्ध Mn का घटना Fe—Mn के मध्य व्युत्क्रम सम्बन्ध का सूचक है। मिट्टी में ही नहीं बल्कि पौधों में भी इसी प्रकार के परिणाम मिले हैं।

Zn की उपलब्धि संयुक्त पूर्वउपचारों ($Cu \times P$) से उन्हीं तत्वों के पृथक-पृथक उपचार की अपेक्षा अधिक एवं सांख्यिकीय दृष्टि से सार्थक रही किन्तु Cu के अवशिष्ट प्रभाव के कारण जड़ों में Zn स्तर सार्थक रूप से घट गया।

नाइट्रोजन की उपलब्धता पर पूर्वउपचारित Cu तथा P का पृथक पृथक प्रभाव सार्थक रहा किन्तु संयुक्त उपचार ($Cu \times P$) का प्रभाव सार्थक नहीं रहा।

विनिमेय Ca तथा Mg की मात्रा 2 वर्ष पूर्व दिये Cu, P एवं $Cu \times P$ उपचारों से सार्थक रूप से प्रभावित हुई।

सारणी 3

Cu—N अन्योन्य क्रियाओं का प्रभाव

सारणी 3.1 उपलब्ध ताम्र (अंश प्रति दस लक्षांश)

	N_0	N_{100}	N_{200}	N_{400}	औसत
Cu_0	0.450	1.65	1.083	0.900	1.020
Cu_{10}	0.500	1.45	1.733	2.050	1.433
Cu_{25}	1.450	2.467	2.833	2.333	2.180
Cu_{50}	2.533	4.017	4.200	5.255	3.982
औसत	1.141	2.395	2.454	2.633	

	Cu	N	Cu×N
S. E.	0.210	0.210	0.420
(C. D.) 5%	0.432	0.432	0.860

सारणी 3.2 उपलब्ध नाइट्रोजन (अंश प्रति दस लक्षांश)

	N_0	N_{100}	N_{200}	N_{400}	औसत
Cu_0	256.67	307.33	294.00	275.33	283.33
Cu_{10}	275.33	312.67	331.33	331.33	312.67
Cu_{25}	283.00	362.67	289.33	289.33	316.50
Cu_{50}	308.00	322.00	294.00	294.00	310.33
औसत	280.75	326.17	297.50	297.50	

	Cu	N	Cu×N
S. E.	14.46	14.46	28.92
(C. D.) 5%	29.53	29.53	—

सारणी 3.3 उपलब्ध लोह (अंश प्रति दस लक्षांश)

	N_0	N_{100}	N_{200}	N_{400}	औसत
Cu_0	82.20	32.25	56.83	56.50	56.95
Cu_{10}	77.23	70.58	79.16	66.58	73.40
Cu_{25}	87.50	60.50	107.67	66.42	80.53
Cu_{50}	50.67	75.50	75.33	86.12	72.00
औसत	74.40	59.70	79.70	69.00	

	Cu	N	Cu×N
S. E.	5.02	5.02	10.04
(C. D.) 5%	10.25	10.25	20.50

सारणी 3.4 उपलब्ध मैंगनीज (अंश प्रति दश लक्षांश)

	N_0	100	N_{200}	N_{400}	औसत
Cu_0	7.72	9.69	9.86	9.99	9.31
Cu_{10}	7.80	9.09	9.39	19.28	11.42
Cu_{25}	8.32	11.20	11.06	20.43	12.75
Cu_{50}	9.60	9.08	14.39	33.00	15.69
औसत	8.36	9.758	11.175	20.70	

	Cu	N	$Cu \times N$
S. E.	1.40	1.40	2.80
(C. D.) 5%	2.86	2.86	5.83

सारणी 3.5 उपलब्ध जिंक (अंश प्रति दस लक्षांश)

	N_0	N_{100}	N_{200}	N_{400}	औसत
Cu_0	4.26	1.73	1.26	1.60	2.21
Cu_{10}	1.66	2.73	2.80	2.86	2.51
Cu_{25}	0.38	2.33	2.33	3.40	2.17
Cu_{50}	2.73	4.00	3.86	2.73	3.33
औसत	2.345	2.692	2.562	2.647	

	Cu	N	$Cu \times N$
S. E.	0.05	0.05	0.10
(C. D.) 5%	0.10	0.10	0.21

सारणी 3.6 उपलब्ध फास्फोरस (अंश प्रति दस लक्षांश)

	N_0	N_{100}	N_{200}	N_{400}	औसत
Cu_0	34.40	26.67	20.80	28.27	27.53
Cu_{10}	33.60	17.07	31.47	38.27	30.10
Cu_{25}	37.40	32.27	16.53	17.60	24.66
Cu_{50}	29.07	23.47	26.67	19.47	24.67
औसत	33.53	24.86	23.87	25.90	

	Cu	N	$Cu \times N$
S. E.	5.12	5.12	10.42
(C. D.) 5%	—	—	—

सारणी 3.7 विनिमेय कैल्सियम (मिली तुल्यांक/100 ग्राम)

	N_0	N_{100}	N_{200}	N_{400}	औसत
Cu_0	5.40	6.20	5.60	5.20	5.60
Cu_{10}	6.00	6.40	5.60	6.40	6.10
Cu_{25}	7.00	6.40	5.40	5.40	6.05
Cu_{50}	5.80	5.80	6.40	6.60	6.15
औसत	6.05	6.20	5.75	5.90	

	Cu	N	Cu×N
S. E.	0.07	0.07	0.14
(C. D.) 5%	0.142	0.142	0.30

सारणी 3.8 विनिमेय मैग्नीशियम (मिली तुल्यांक/100 ग्राम)

	N_0	N_{100}	N_{200}	N_{400}	औसत
Cu_0	2.20	1.80	1.40	1.40	1.70
Cu_{10}	0.20	1.80	2.20	2.00	2.05
Cu_{25}	2.20	2.68	1.80	1.80	2.10
Cu_{50}	2 0	1.20	2.00	2.00	1.80
औसत	2.15	1.85	1.85	1.80	

	Cu	N	Cu×N
S. E.	0.07	0.07	0.14
(C. D.) 5%	0.14	0.14	0.29

Cu – N उपचार

नाइट्रोजन की उच्च मात्रा के साथ साथ यदि Cu भी रहे तो उपलब्ध Cu की मात्रा इन्हीं तत्वों के अलग अलग उपचारों की अपेक्षा काफी अधिक मिली। यह मात्रा पहली फसल के बाद ज्ञात की गई मात्रा से कम रही। हाँ केवल उच्च स्तर Cu (2 वर्ष पूर्व उपचारित) तथा निम्न स्तर N के पूर्व उपचार का प्रभाव नाइट्रोजन उपलब्धता पर धनात्मक एवं सार्थक रहा परन्तु Cu×N पूर्व उपचार का नाइट्रोजन की उपलब्धि पर Cu के उच्च स्तर तथा N के निम्न स्तर का प्रभाव लक्षित होता है।

Cu,N तथा Cu×N पूर्व उपचार से दूसरे वर्ष मिट्टी में प्रथम वर्ष फसलोपरान्त मृदा परीक्षण की तुलना में 2-3 गुना अधिक उपलब्ध लोह प्राप्त हुआ। Mn की उपलब्धि पर भी Cu तथा N तत्वों के अलग-अलग उपचारों की अपेक्षा संयुक्त उपचार (Cu×N) का प्रभाव अच्छा रहा किन्तु यह मात्रा प्रथम वर्ष फसलोपरान्त मृदा परीक्षण की अपेक्षा एक तिहाई ही रह गई। ऐसा ही Cu×P उपचारित मृदा में भी देखा गया।

Zn की उपलब्धि पूर्व उपचारित संयुक्त (Cu×N) उपचारों की अपेक्षाकृत उन्हीं तत्वों के अलग-अलग उपचारों से अधिक तथा सार्थक रही। कुछ उपचारों को छोड़कर शेष सभी में उपलब्ध P की मात्रा घटी किन्तु यह प्रभाव सांख्यिकीय दृष्टिकोण से सार्थक नहीं रहा। Cu तथा P के उपचारों से भी केवल 10 ppm Cu पूर्व उपचार को छोड़कर शेष सभी उपचारों से P उपलब्धि में कमी आयी।

विनिमेय Ca तथा Mg की मात्रा पर Cu×N पूर्वउपचार का प्रभाव सार्थक रहा यद्यपि 2 वर्ष पूर्व Cu के उपचार से विनिमेय Ca तथा Mg भी बढ़ा तथा नाइट्रोजन पूर्वउपचार से इनकी मात्रा में ह्रास हुआ। उपर्युक्त विवेचना से यह स्पष्ट है कि मृदा में डाले गये और सभी तत्वों की उपलब्धि में निरन्तर ह्रास होता है किन्तु लोह की उपलब्धि कालान्तर में बढ़ती है जिसका कारण मृदा में पौधों की जड़ों व अन्य कार्बनिक पदार्थों के सूक्ष्मजैविक विघटन के फलस्वरूप मुक्त तत्व ही सम्भव हो सकते हैं।

निर्देश

1. चेंग, के० एल० तथा ब्रे, आर० एच०, **एनालि० केमि०**, 1953, **25**, 645-669.
2. चेंग, के० एल० तथा ब्रे, आर० एच०, **सॉयल साइन्स**, 1951, **72**, 449-458.
3. जैक्सन, एम० एल०, Soil Chemical Analysis, **एशिया पब्लिशिंग हाउस**, 1962.
4. ओल्सन, आर० वी०, Agronomy, 1965, **9**, 663-73.
5. ओल्सेन, इत्यादि, **यू० एस० डी० ए० सिरकु०** 1954, 939.
6. शा, ई० तथा डीन, एल० ए०, **सायल साइन्स**, 1952, **73**, 342.
7. पाइपर, सी० एस०, Soil and Plant Analysis. **यूनिवर्सिटी आफ एडीलेड, एडीलेड**, 1957.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 19, No. 4, October, 1976, Pages 393-403

सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की अन्योन्य क्रियाओं का मिट्टी के पोषक तत्वों पर अवशिष्ट प्रभाव-II

शिवगोपाल मिश्र तथा रविशंकर द्विवेदी
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त— जून 1, 1976]

सारांश

लोह् के साथ ताम्र अथवा निकेल उपचार का मृदा के स्थूल (कैल्सियम, मैग्नीशियम तथा फास्फोरस) तथा सूक्ष्ममात्रिक तत्वों (मैंगनीज तथा जिंक) के साथ ही डाले गये सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की उपलब्धि पर प्रभाव का अध्ययन लाल मिट्टी में 2 वर्ष उत्तरोतर मक्का उगाकर किया गया। लोह्×ताम्र उपचार से मृदा निकेल की उपलब्धि में वृद्धि हुई तथा उपलब्ध जिंक में सार्थक ह्रास हुआ जबकि ताम्र, लोह्, फास्फोरस, कैल्सियम तथा मैग्नीशियम की उपलब्धि विचरणशील रही। लोह्×निकेल उपचार से उपलब्ध निकेल तथा लोह् में सार्थक वृद्धि हुई तथा उपलब्ध जिंक तथा ताम्र की मात्रा में सार्थक ह्रास हुआ। उपलब्ध फास्फोरस, विनिमेय कैल्सियम तथा मैग्नीशियम में कोई नियमित प्रक्रम नहीं लक्षित हुआ। उपलब्ध लोह् की मात्रा लोह्-ताम्र, लोह्-निकेल उपचारों में 2 वर्ष पश्चात, प्रथम वर्ष के बाद की तुलना में 2-3 गुना थी जबकि उपलब्ध मैंगनीज प्रथम वर्ष के अन्त का 1/3-1/4 रह गया।

Abstract

Residual effect of micronutrient interactions on nutrient elements-II. *By* S. G. Misra and R. S. Divedi, Agricultural Chemistry Section, Department of Chemistry, University of Allahabad.

Effect of addition of Fe along with Cu or Ni on the availability of native macro (Ca, Mg and P) and micronutrients (Mn, Zn) as well as on added micronutrient elements to red soil has been studied after growing maize successively for two years. It has been observed that Cu × Fe treatment increased the availability of soil-Ni and decreased available Zn significantly whilst the availability of Cu, Fe, P, Ca and Mg was affected variably. Fe × Ni treatments increased the amounts of available Fe and Ni and decreased available Zn and Cu significantly. No regular trend in the amounts

of available P, exchangeable Ca and Mg could be seen. Under Cu – Fe, and Fe – Ni treatments the amount available Fe after two years was 2-3 times the amount after the first year whilst available Mn dropped to 1/3-1/4 of the amount at the end of first year.

फसलों के उगाने के पूर्व मृदा में उपस्थित उपलब्ध भोज्य तत्वों के स्तर की जानकारी पौधों के संतुलित खनिजपोषण की दृष्टि से अत्यन्त महत्वपूर्ण है। पौधे मिट्टी में उपस्थित भोज्य तत्वों को ग्रहण करके अपना जीवन-चक्र पूरा करते हैं। उनके द्वारा कुछ कार्बनिक पदार्थ (पौधों के अवशेष) तथा जड़ें मृदा में छोड़ दी जाती हैं जो अनुकूल परिस्थितियों में सूक्ष्मजैविक क्रियाओं द्वारा खनिजीकृत होकर मिट्टी में मिल जाते हैं। इस प्रकार मृदा में भोज्य तत्वों का चक्र चलता रहता है। फसल द्वारा ग्रहण करने के पश्चात शेष तत्व तथा जड़ों और कार्बनिक पदार्थ के विघटन से प्राप्त तत्व अगली फसल के लिये उपलब्ध होते रहते हैं। यदि फसल काटने के पश्चात मृदा में उपस्थित उपलब्ध तत्वों की मात्रा निश्चित की जाय और फसल द्वारा ग्रहीत तत्वों के स्तर से तुलना की जाय तो यह जानकारी उर्वरक-संस्तुति में विशेष सहायक हो सकती है।

इसी दृष्टि से प्रस्तुत अध्ययन में 2 वर्ष पूर्व मृदा में डाले गये Cu, Fe तथा Ni के फलस्वरूप विभिन्न तत्वों की मिट्टी में उपलब्धि ज्ञात की गई है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिये बसहरा, मेजा (इलाहाबाद) से लालमिट्टी का सतही नमूना (0–15 सेमी०) एकत्र किया गया और मिट्टी को प्रयोगशाला में सुखाने के पश्चात उसे पीसकर फिर 100 छिद्र वाली चलनी से चाल कर संग्रहीत किया गया। मिट्टी के कुछ भौतिक एवं रासायनिक गुणों का निश्चयन मानक विधियों से किया गया जिसका विवरण सारिणी 1 में दिया गया है। मृदा Cu-न्यून तथा फास्फेट अनुक्रियात्मक पाई गई। मिट्टी में N, P, तथा K को 120 :60:60 ppm की दर से अच्छी तरह मिलाया गया तथा 4 कि० ग्रा० मिट्टी प्रत्येक गमले में भर दी गई। प्रयोग दो अलग सेटों में व्यवस्थित किया गया। पहले वर्ष मिट्टी को Cu तथा Fe के 0, 10, 25 तथा 50 ppm ($CuSO.5H_2O$ तथा $Fe\ SO_4.7H_2O$) की दरों से (विलयन के रूप में) उपचारित किया गया और मक्के की फसल ली गई जिसमें प्रत्येक गमले में 4 पौधों को उगने देकर उन्हें 45 दिन पश्चात काट लिया गया। अब मिट्टी को गमलों में अगली फसल के लिये पड़ा रहने दिया गया। बीच-बीच में गुड़ाई की गई जिससे जड़ें सड़ जायँ। दूसरे वर्ष पुनः मक्का उगाया गया। उगाने के पूर्व N, P तथा K 120 : 60 : 60 ppm विलयन के रूप में मिट्टी में मिला दिये गये। 45 दिन पश्चात मक्के के पौधे काट लिये गये। इस बार जड़ें भी मिट्टी से पृथक कर ली गईं। प्रत्येक गमले से मिट्टी के नमूने लिये गये और उनमें विनिमेय ताम्र, निकेल, कैल्सियम, मैग्नीशियम तथा मैंगनीज का निश्चयन $1N\ NH_4OAc$ (पी-एच 7·0) के निष्कर्षण में क्रमशः चेंग और ब्रे; सैन्डेल, चेंग तथा ब्रे और जैक्सन की विधियों द्वारा किया गया। उपलब्ध लोह $1\ N\ NH_4OAc$(पी-एच 4·8) निष्कर्षण में ओलसन की विधि[3] द्वारा तथा उपलब्ध जिंक $1\ N\ NH_4OAc + 0{\cdot}25\%$ डिथीजोन निष्कर्षण में शा तथा डीन की विधि[4] द्वारा निश्चित किया तथा उपलब्ध फास्फेट का निश्चयन ओलसेन इत्यादि[7]

की बाइकार्बोनेट विधि द्वारा किया गया। इस प्रकार प्राप्त आंकड़ों का सांख्यिकीय विश्लेषण भी किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

1. Cu×Fe उपचार

मृदा में विभिन्न निष्कर्षकों द्वारा निष्कर्षित विभिन्न तत्वों की मात्रायें सारिणी 2·1·1 से 2·1·8 तथा 3·1 से 3·8 में दी गई हैं। सारिणी 2·1·1 से यह स्पष्ट है कि Cu उपचार के फलस्वरूप मृदा-ताम्र की उपलब्धता में वृद्धि हुई है जबकि Fe पूर्व उपचार से Cu में ह्रास हुआ। जहाँ Cu तथा Fe का संयुक्त उपचार 2 वर्ष पूर्व हुआ उनमें मृदा-ताम्र की उपलब्धि विचरणशील पाई गई। उपलब्ध निकेल की मात्रा में इन्हीं उपचारों के अंतर्गत वृद्धि हुई। उपलब्ध लोह (सारिणी 2·1·2) का स्तर ऐसे उपचारों में जिनमें ताम्र डाला गया था अधिक पाया गया। लोह तथा लोह×ताम्र पूर्व उपचार से लोह की उपलब्धता नियमित रूप से नहीं प्रभावित हुई। मृदा से निष्कर्षित दूसरे वर्ष उपलब्ध लोह की मात्रा प्रथम वर्ष की अपेक्षा लगभग दुगुनी पाई गई जो कि अनुमानतः पिछली फसल की जड़ों के विघटन से मुक्त हुये लोह के कारण हो सकती है।

दो वर्ष बाद मिट्टी में उपलब्ध-मैंगनीज की मात्रा एक वर्ष बाद की अपेक्षा 1/3-1/4 रह गई जो कि पौधों द्वारा प्रचुर मात्रा में उद्ग्रहण होने के कारण हो सकती है किन्तु फिर भी डाले गये सूक्ष्ममात्रिक तत्वों का प्रभाव नियन्त्रित प्रयोग से अधिक Mn द्वारा स्पष्ट है।

उपलब्ध जिंक की मात्रा में पूर्व की अपेक्षा नियंत्रण को छोड़कर सभी उपचारों के कारण सार्थक ह्रास हुआ। फास्फेट की उपलब्धता (सारिणी 2·1·6) पूर्व के ही समान प्रकट होती है यद्यपि पौधों द्वारा फास्फेट काफी उद्ग्रहण हुआ है। ताम्र पूर्व उपचार के कारण मृदा-फास्फोरस में थोड़ी वृद्धि देखी गई किन्तु प्रभाव सार्थक नहीं रहा।

सामान्यतः उपलब्ध मृदा-निकेल का स्तर पूर्व वर्ष की अपेक्षा निम्न रहा तथा सभी उपचारों से सार्थक वृद्धि हुई है।

विनिमेय कैल्सियम की मात्रा ताम्र तथा लोह पूर्व उपचारों से सार्थक रूप से घटी है जबकि विनिमेय मैग्नीशियम की मात्रा में पूर्व उपचारित ताम्र के कारण वृद्धि हुई है। पूर्व लोह उपचार के कारण यह मात्रा थोड़ी घट गई। ये परिवर्तन पौधों द्वारा कैल्सियम और मैग्नीशियम के उद्ग्रहण के कारण परिलक्षित हो सकते हैं।

2. Fe×Ni उपचार

सारिणी 3·1 से यह स्पष्ट है कि Fe या Ni के पूर्व उपचार से उपलब्ध-लोह की मात्रा में सार्थक वृद्धि हुई है जबकि संयुक्त (Fe×Ni) उपचार का प्रभाव और भी स्पष्ट रहा। Ni के द्वारा

उपलब्ध-लोह में वृद्धि Fe और Ni के मध्य आक्सीकरण-अपचयन के कारण सम्भव है। उपलब्ध लोह की मात्रा 2 वर्ष पूर्व की अपेक्षा लगभग 3-4 गुनी रही जो कि पूर्व फसल द्वारा मृदा में छोड़ी गई जड़ों के सूक्ष्मजीवों द्वारा विघटन से मुक्त हुये लोह के कारण ही सम्भव है।

उपलब्ध निकेल की मात्रा में Fe, Ni तथा Fe × Ni पूर्व उचारों से सार्थक वृद्धि हुई है। पूर्व वर्ष की अपेक्षा दूसरे वर्ष उपलब्ध निकेल की मात्रा कम रही जो कि पूर्व फसल द्वारा निकेल ग्रहण करने की ओर संकेत करती है।

उपलब्ध ताम्र की मात्रा में निकेल के उपचार से सार्थक वृद्धि हुई है तथा किन्तु लोहे का प्रभाव विपरीत रहा। निकेल के साथ लोह डालने से उपलब्ध ताम्र में सार्थक ह्रास हुआ।

Ni की अपेाक्षा Fe उपचार के कारण Mn की उपलब्धि में वृद्धि देखी गई। उपलब्ध मैंगनीज पूर्व वर्षों की अपेक्षा 1/3-1/4 रह गया।

उपलब्ध जिंक की मात्रा 2 वर्ष पूर्व डाले गये लोह अथवा निकेल अथवा लोह × निकेल उपचारों की तुलना में सार्थक रूप से घटी जो कि दोनों फसलों द्वारा अधिक मात्रा में जिंक ग्रहण के कारण हो सकती है।

उपलब्ध फास्फेट की मात्रा 2 वर्ष पूर्व डाले गये निकेल उपचार से बढ़ी है परन्तु लोह उपचार का ऐसा कोई प्रभाव नहीं पाया गया। लोह × निकेल उपचार से उपलब्ध फास्फेट की मात्रा में परिवर्तनशील प्रभाव देखा गया।

विनिमेय कैल्सयम की मात्रायें ऐसे उपचारों में सार्थक रूप से बढ़ीं जहाँ 2 वर्ष पूर्व लोह या निकेल डाले गये थे। इसके विपरीत विनिमेय मैग्नीशियम की मात्रा पूर्व निकेल उपचारित गमलों में कम पाई गई। पौधों द्वारा कैल्सियम का उद्ग्रहण मिट्टी में इसकी उपलब्धता के अनुसार रहा परन्तु पौधों में मैग्नीशियम का स्तर पूर्व उपचारित निकेल के कारण बढ़ा हुआ पाया गया।

इस प्रकार उपर्युक्त विवेचना से यह स्पष्ट हो जाता है कि सूक्ष्ममात्रिक तत्व मिट्टी में अवशिष्ट प्रभाव अगली बोई जाने वाली फसलों पर डालते हैं तथा मिट्टी में बहुत समय तक उपलब्ध रूप में भी उपस्थित रहते हैं परन्तु समय के साथ यह मात्रा घटती जाती है (लोह को छोड़कर) जिससे सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की अतिरिक्त मात्रा डालना आवश्यक है।

सारिणी 1

मिट्टी के कुछ भौतिक तथा रासायनिक गुण

पी-एच	6·5	उपलब्ध Ni (अंश प्रति दस लक्षांश)	0·16
कार्बनिक कार्बन	0·4914 (%)	उपलब्ध P (अंश प्रति दस लक्षांश)	8·40
कैल्सियम कार्बोनेट	0·27 (%)	उपलब्ध Zn (अंश प्रति दस लक्षांश)	6·40
उपलब्ध लोह (अंश प्रति दस लक्षांश)	13·6	बालू	43·80 (%)
विनिमेय Mn (अंश प्रति दस लक्षांश)	26·9	सिल्ट	28·40 (%)
उपलब्ध Cu (अंश प्रति दस लक्षांश)	0·250	मृत्तिका	27·80

सारिणी 2

Cu-Fe अन्योन्य क्रियान्ओं का प्रभाव

सारिणी-2·1·1 उपलब्ध ताम्र (अंश प्रति दस लक्षांश)

	Fe_0	Fe_{10}	Fe_{25}	Fe_{50}	औसत
Cu_0	0·500	0·467	0·450	0·412	0·458
Cu_{10}	0·950	1·300	0·333	0·683	0·989
Cu_{25}	2·183	1·933	1·433	1·367	1·730
Cu_{50}	4·217	1·317	2·867	4·433	3·208
औसत	1·962	1·254	1·270	1·725	

	Cu	Fe	Cu×Fe
S.E.	0·134	0·134	0·269
(C.D.)5%	0·274	0·274	0·550

सारिणी-2·1.2 उपलब्ध लोह (अंश प्रति दस लक्षांश)

	Fe_0	Fe_{10}	Fe_{25}	Fe_{50}	औसत
Cu_0	61·17	54·00	54·17	57·00	56·58
Cu_{10}	74·75	66·30	64·67	69·33	68·76
Cu_{25}	62·42	72·08	70·00	66·33	67·70
Cu_{50}	70·00	55·33	67·50	60·88	63·43
औसत	67·08	61·93	64·08	63·39	

	Cu	Fe	Cu+Fe
S.E.	6·28	6·28	12·68
(C.D.)5%	12·83	—	—

सारिणी-2·1.3 उपलब्ध निकेल (अंश प्रति दस लक्षांश)

	Fe_0	Fe_{10}	Fe_{25}	Fe_{50}	औसत
Cu_0	0·100	0·100	0·122	0·130	0·113
Cu_{10}	0·120	0·240	0·270	0·300	0·232
Cu_{25}	0·122	0·280	0·320	0·350	0·268
Cu_{50}	0·125	0·285	0·325	0·450	0·296
औसत	0·117	0·226	0·260	0·307	

	Cu	Fe	Cu×Fe
S.E.	0·043	0·043	0·087
(C.D.)5%	0·088	0·088	0·177

सारिणी-2.1.4 उपलब्ध मैंगनीज (अंश प्रति दस लक्षांश)

	Fe_0	Fe_{10}	Fe_{25}	Fe_{50}	औसत
Cu_0	7·87	6·66	4·84	3·63	5·75
Cu_{10}	5·14	2·42	10·48	11·24	7·32
Cu_{25}	3·87	2·11	13·33	13·93	8·31
Cu_{50}	4·54	6·97	11·45	12·12	8·77
औसत	5·35	4·54	10·03	10·23	

	Cu	Fe	Cu×Fe
S.E.	0·28	0·21	0·56
(C.D.)5%	0·57	0·57	1·15

सारिणी-2·1·5 उपलब्ध जिंक (अंक प्रति दस लक्षांश)

	Fe_0	Fe_{10}	Fe_{25}	Fe_{50}	औसत
Cu_0	5·86	3·53	2·33	1·53	
Cu_{10}	1·66	3·26	4·33	2·86	
Cu_{25}	3·06	2·20	1·80	1·60	
Cu_{50}	2·53	1·06	1·33	0·53	
औसत	3·28	2·51	2·45	1·63	

	Cu	Fe	Cu × Fe
S.E.	0·28	0·28	0·56
(C.D.)5%	0·57	0·57	1·16

सारिणी-2·1·6 उपलब्ध फास्फोरस (अंश प्रति दस लक्षांश)

	Fe_0	Fe_{10}	Fe_{25}	Fe_{50}	औसत
Cu_0	24·80	23·20	33·33	26·13	26·90
Cu_{10}	24·67	36·80	32·27	19·60	28·50
Cu_{25}	38·93	27·20	28·26	35·73	32·53
Cu_{50}	36·80	26·93	27·67	32·80	31·05
औसत	31·50	28·53	30·40	28·57	

	Cu	Fe	Cu × Fe
S.E.	4·80	4·83	9·61
(C.D.)5%	—	—	—

सारिणी-2·1·7 विनिमेय कैल्सियम (मिली तुल्यांक/100 ग्राम)

	Fe_0	Fe_{10}	Fe_{25}	Fe_{50}	औसत
Cu_0	7·00	5·73	6·20	6.00	6·15
Cu_{10}	6·60	6·20	5·80	5·60	6·05
Cu_{25}	6·20	5·40	6·00	5·60	5·80
Cu_{50}	6·00	5·60	6·00	6·00	5·90
औसत	6·45	5·65	6·00	5·80	

	Cu	Fe	Cu × Fe
S.E.	0·06	0·06	0·12
(C.D.)5%	0·13	0·13	0·26

सारिणी-2·1·8 विनिमेय मैग्नीशियम (मिली तुल्यांक/100 ग्राम)

	Fe_0	Fe_{10}	Fe_{25}	Fe_{50}	औसत
Cu_0	2·20	1·80	2·00	1·80	1·95
Cu_{10}	2·20	2·20	1·60	2·00	2·00
Cu_{25}	2·60	2·20	1·80	1·80	1·85
Cu_{50}	2·00	2·00	2·00	2·20	2·05
औसत	2·00	2·05	1·85	1·95	

	Cu	Fe	Cu × Fe
S.E.	0·05	0·05	0·12
(C.D.)5%	0·11	0·11	0·22

सारिणी-3

Fe — Ni अन्योन्य क्रिया का प्रभाव

सारिणी-3·1 उपलब्ध लोह (अंश प्रति दस लक्षांश)

	Fe_0	Fe_{10}	Fe_{25}	Fe_{50}	औसत
Ni_0	61·20	54·00	60·83	57·00	58·25
Ni_{10}	63·16	93·83	109·33	88·17	88·62
Ni_{25}	59·50	87·50	97·42	68·83	78·31
Ni_{50}	38·92	93·25	92·25	112·33	84·19
औसत	55·69	82·15	89·96	81·58	

	Fe	Ni	Fe × Ni
S.E.	4·06	4·06	8·12
(C.D.)5%	8·29	8·29	16·59

सारिणी-3·2 उपलब्ध निकेल (अंश प्रति दस लक्षांश)

	Fe_0	Fe_{10}	Fe_{25}	Fe_{50}	औसत
Ni_0	0·100	0·100	0·122	0·130	0·113
Ni_{10}	0·500	0·510	0·550	0·560	0·530
Nl_{25}	0·560	0·600	0·700	0·780	0·660
Ni_{50}	1·800	1·900	2·000	2·500	2·050
औसत	0·740	0·780	0·843	0·992	

	Fe	Ni	Fe × Ni
S.E.	0·022	0·022	0·044
(C.D.)5%	0·045	0·045	0·091

सारिणी-3·3 उपलब्ध ताम्र (अंश प्रति दस लक्षांश)

	Fe_0	Fe_{10}	Fe_{25}	Fe_{50}	औसत
Ni_0	0·500	0·467	0·450	0·417	0·458
Ni_{10}	0·950	0·320	0·517	0·483	0·567
Ni_{25}	1·083	0·317	0·583	0·500	0·620
Ni_{50}	1·167	0·467	0·533	0·317	0·620
औसत	0·925	0·391	0·520	0·430	

	Fe	Ni	Fe×Ni
S.E.	0·045	0·045	0·109
(C.D.)5%	0·110	0·110	0·220

सारिणी-3·4 उपलब्ध मैगनीज (अंश प्रति दस लक्षांश)

	Fe_0	Fe_{10}	Fe_{25}	Fe_{50}	औसत
Ni_0	7·87	6·66	4·84	3·63	5·75
Ni_{10}	2·42	8·91	8·18	8·48	6·99
Ni_{25}	0·84	7·27	7·26	7·57	5·74
Ni_{50}	1·81	8·78	11·21	6·34	7·04
औसत	3·23	7·91	7·87	6·51	

	Fe	Ni	Fe×Ni
S.E.	1·01	1·01	2·00
(C.D.)5%	2·04	—	4·09

सारिणी-3·5 उपलब्ध जिंक (अंश प्रति दस लक्षांश)

	Fe_0	Fe_{10}	Fe_{25}	Fe_{50}	औसत
Ni_0	5·86	3·53	2·33	1·53	3·31
Ni_{10}	4·13	4·26	2·86	1·86	3·28
Ni_{25}	5·00	2·20	1·60	1·93	2·68
Ni_{50}	3·13	3·80	2·13	1·60	2·66
औसत	4·53	3·45	2·23	1·73	

	Fe	Ni	Fe×Ni
S.E.	0·017	0·017	0·030
(C.D)5%	0·035	0·035	0·070

सारिणी-3·6 उपलब्ध फास्फोरस (अंश प्रति दस लक्षांश)

	Fe_0	Fe_{10}	Fe_{25}	Fe_{50}	औसत
Ni_0	24·80	23·20	33·33	26·13	26·87
Ni_{10}	23·46	26·93	46·40	25·07	30·47
Ni_{25}	32·80	38·67	24·53	24·67	30·17
Ni_{50}	34·67	27·20	25·60	56·87	31·08
औसत	28·23	29·00	33·50	28·18	

	Fe	Ni	Fe × Ni
S.E.	3·67	3·67	7·34
(C.D.)5%	—	—	15·00

सारिणी-3·7 विनिमेय कैल्सियम (मिली तुल्यांक/100 ग्राम)

	Fe_0	Fe_{10}	Fe_{25}	Fe_{50}	औसत
Ni_0	7·00	5·40	6·20	6·00	6·15
Ni_{10}	6·20	5·60	5·80	6·60	6·05
Ni_{25}	6·20	5·80	5·60	6·40	6·00
Ni_{50}	6·20	6·00	6·20	5·80	5·90
औसत	6·25	5·70	5·95	6·20	

	Fe	Ni	Fe × Ni
S.E.	0·08	0·08	0·16
(C.D.)5%	0·16	0·16	0·34

सारिणी-3·8 विनिमेय मैग्नीशियम (मिली तुल्यांक/100 ग्राम)

	Fe_0	Fe_{10}	Fe_{35}	Fe_{50}	औसत
Ni_0	2·20	1·80	2·00	1·80	6·15
Ni_{10}	1·80	1·40	2·00	2·00	6·05
Ni_{25}	2·00	2·00	1·80	1·60	6·00
Ni_{50}	1·40	2·00	1·60	1·60	5·90
औसत	1·85	1·80	1·85	1·75	

	Fe	Ni	Fe × Ni
S.E.	0·08	0·08	0·16
(C.D.)5%	0·16	0·16	0·34

निर्देश

1. चेंग, के० एल० तथा ब्रे, आर० एच०, **सॉयल साइन्स**, 1951, **72**, 449-558.
2. चेंग, के० एल० तथा ब्रे, आर० एच०, **एनालि० केमि०**, 1953, **25**, 655-669.
3. ओल्सन, आर० वी० Agronomy **9**, 963-73.
4. शा, ई० तथा डीन, एल० ए०, **सॉयल साइन्स**, 1952, 73, 342.
5. जैक्सन, एम० एल०, Soil Chemical Analysis **एशिया पब्लिशिंग हाउस**, 1962.
6. सैन्डेल, ई० बी०, Colorimetric deteminations of traces of Metals **इन्टरसाइन्स पब्लिशर्स न्यूयार्क**, 1960.
7. ओल्सेन, इत्यादि, **यू० एस० डी० ए० सिर०**, 1954 989.
8. पाइपर, सी० एस०, Soil and Plant Analysis **यूनिवर्सिटी आफ एडीलेड, एडीलेड**, 1967

लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिए तथा पंक्तियों बीच में पार्श्व में संशोधन के लिए उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

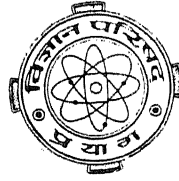
6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिए कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सके।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिए। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिए। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार हो कर आने चाहिए। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।'

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०। **जाइट फिजिक० केमि०**, 1928, **150**, 80।

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिण्ट) बिना मूल्य दिये जायँगे। इनके अतिरिक्त यदि और प्रतियाँ लेनी हों, तो लागत मूल्य पर मिल सकेंगी।

10. लेख **"सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, प्रयाग"**, इस पते पर आने चाहिए। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबंध सम्पादक

निर्देश

1. लैम्पर्ट, एम० ए० तथा मार्क पी०, Current injection in solids. **एकेडमिक प्रेस० न्यूयार्क**, 1970
2. गिसाल्फ, ए० तथा जिजल्स्ट्रा, आर० जे० जे०, Solid State Electronics, 1973, **16**, 571
3. शर्मा, वाई० के० तथा श्रीवास्तव, वी० पी०, **वही**, 1974, **17**, 1214
4. वही, Phys Status Solidi, 1975, **27**, 633